阿波罗登月中的功臣数学家阿仁斯道夫

蒋 迅

2013 年，一件轰动数学界特别是中国数学界的事件是，一位不太为人所知的时年 58 岁的数学家张益唐证明了一个弱形式的孪生素数猜想：存在无穷多个其间之差小于 7000 万的素数对。张益唐的成果让很多追求这个终极目标的数学家们又重新燃起了希望，此后，数学家们迅速将 7000 万降到了 246。

张益唐的生活从此改变：学校把他从合同制讲师立马提升到正教授，各种奖励接踵而来，各大名校纷纷邀请他加盟，中国数学界对其盛情邀请。常人们则把话题的焦点集中在了张益唐这样做是否值得的问题上：万一他一辈子都做不出这样的结果来，那他一辈子可能就是一个大学合同制讲师。在我们回答这个问题之前，先请读者来看另一个人的故事。这个人也试图攻下孪生素数猜想，曾经以为自己成功了，但终究以失败而告终。如果他对张益唐的研究成果地下有知，会作何感想呢？他就是美国范德堡大学的数学家理查德 • 阿仁斯道夫（Richard Arenstorf）教授 [1]。

图 1 阿仁斯道夫（1966 年）

阿仁斯道夫 1929 年 11 月 7 日在德国汉堡出生。他的德文名字是 Richard Franz Joseph Shultz-Arenstorff。对于他，我们知道的很少。可能因为他是一个德国人，英文的资料很少，但维基百科上居然没有他的德文条目，让我有些惊讶。经过一番费力的搜索和查询，我只能得到如下的信息：阿仁斯道夫的父亲在他幼年的时候就独自离开了德国，母亲则因反对法西斯而死在了纳粹的监狱里。他由养父母抚养成人。高中毕业后，他进入了汉堡大学数学系学习，后转学哥廷根大学。在汉堡读书期间，他认识了同系的雷娜特 • 曼泽克（Renate Manseck）。他们经过三年的拉锯式恋爱，终于走进了婚姻的殿堂。阿仁

[1] Wikipedia, https://en.wikipedia.org/wiki/Richard_Arenstorf.

斯道夫于 1952 年和 1954 年分别获得哥廷根大学数学学士和硕士学位，1956 年在美茵茨大学汉斯 • 罗巴赫（Hans Rohrbach[2]）教授的指导下获得博士学位。他的论文题目是“实二次数域剩余类上的素数的二维分布”[3]。这属于解析数论的范畴。因为他大量使用了复变函数的方法，所以掌握了娴熟的复分析技巧。在这一点上，他的工作很类似于将黎曼 ζ 函数用于数论的思路。我们推荐读者阅读卢昌海的精彩科普文章《黎曼猜想漫谈》。

图 2 美茵茨大学

阿仁斯道夫的导师罗巴赫不算是一个大数学家。罗巴赫 1932 年从柏林大学获得博士学位，主要研究领域是堆垒数论。二战期间他参加了纳粹党，甚至冲锋队，但又不被信任，因为他与一些犹太裔的同事保持良好关系。由于他的专业是数论，他被调到纳粹解码部门，曾经成功解开了美国驻柏林使馆的通讯。这一点上，他与图灵做的很相似，但他的名气则完全不能和图灵相比。二战结束后，他改信基督教，在这方面花了大量时间。不知阿仁斯道夫怎么会到美茵茨大学去找这样一位导师。几乎可以肯定的是，他已经意识到了这位导师不是太在行，所以有意把哥廷根大学的著名数论专家卡尔 • 西格尔（Carl Ludwig Siegel）请进自己的博士学位委员会里。一种可能就是他本来是想跟西格尔的，但是西格尔在 1956 年之后不再收学生（他的最后一个博士生毕业于 1957 年）。尽管没能成为西格尔指导的学生，西格尔对阿仁斯道夫的影响还是很大的。我们在阿仁斯道夫的博士论文中可以看到许多西格尔的思想。而另一个重要的影响是西格尔在天体力学方面的工作，特别是三体问题。这应该是阿仁斯道夫后来搞起了弹道导弹和卫星轨道问题的重要原因。

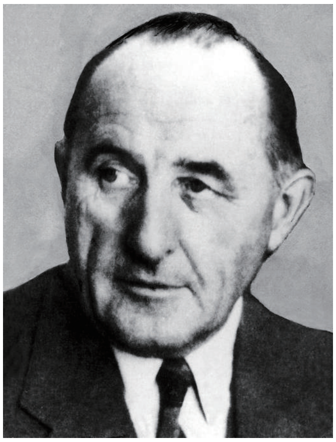

图 3 卡尔 • 西格尔（1896-1981）

获得博士学位后，阿仁斯道夫回到了哥廷根。正好这时，美国到德国搜罗人才，一个三人小组找到了他。1957 年，在得到了丰厚的房、车许诺

[2] Wikipedia, https://de.wikipedia.org/wiki/Hans_Rohrbach.

[3] R. Schulz-Arenstorff, Über die zweidimensionale Verteilung der Primzahlen reell-quadratischer Zahlkörper in Restklassen, J. Reine Angew. Math. 198 (1957), 204–220.

之后，阿仁斯道夫接受了陆军弹道导弹局（Army Ballistic Missile Agency, ABMA）的非军事编制科学家的任命，他带领妻子和一个刚刚出生的儿子移民美国。1960 年在归化为美国公民时把全家的姓简化成了 Arenstorf，显然是为了纪念他的英雄母亲。这个陆军弹道导弹局是个什么单位呢？ ABMA 成立于 1956 年 2 月。它的技术主任就是大名鼎鼎的德国 V1 和 V2 火箭的总设计师沃纳 • 冯 • 布劳恩（Wernher von Braun）。“PGM-11 红石（Redstone）”是 ABMA 的第一个重要项目，基本上是 V2 火箭的继续。美国海军研究实验室搞的第一个发射卫星的“先驱计划”失败后，布劳恩搞的中程弹道导弹 IRBM“丘比特 -C 型火箭”正好适用于发射美国第一颗人造卫星的“朱诺一号运载火箭”的设计要求。1956 年 9 月，美国使用“丘比特 -C 型火箭”成功发射了一个卫星模型。人们普遍认为，如果当时美国政府允许搭载真的卫星的话，那世界上第一颗人造卫星就不是苏联人发射的“斯普特尼克 1 号”卫星了。1958 年 1 月，“丘比特 -C 型火箭”将美国第一颗人造卫星“探险者 1 号”送入地球轨道。阿仁斯道夫就是在这样一个大环境中加入了布劳恩的团队的。1960 年，ABMA 被合并到 NASA，阿仁斯道夫也随着变成了 NASA 的一名科学家，仍然在布劳恩的手下工作。

图 4 沃纳 • 冯 • 布劳恩(1912-1977)

图 5 阿仁斯道夫转为 NASA 科学家时的照片

阿仁斯道夫的专业方向是数论，听起来跟天体力学完全没有关系。即使他拿到博士学位后立即转行，也很难想象他能被布劳恩选中研究天体轨道问题。这里的关键是他使用的研究工具——复分析。前面说过，他的博士论文结果是用的复分析。现在我们再来看看他是怎样把复分析用到天体力学里，具体地说就是怎样用到三体问题中的。

三体问题是天体力学中的基本力学模型。它是指三个质量、初始位置和初始速度都是任意的可视为质点的天体，在相互之间万有引力的作用下的运动规律问题。这是一个有三百多年历史的古老问题。历史上，包括欧拉、拉格朗日和庞加莱在内的著名数学家都研究过。如果把这些运动方程都罗列出来一共有 9 个方程。

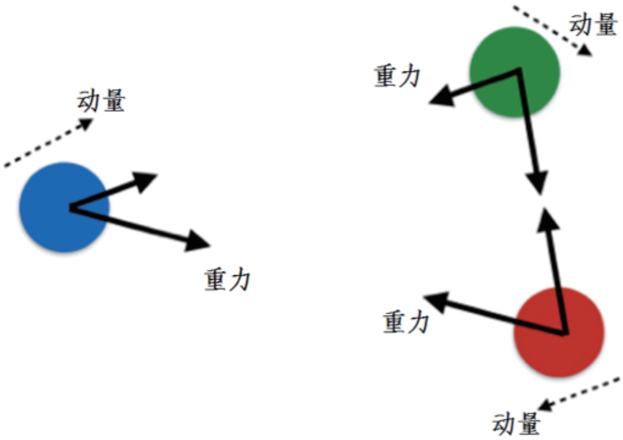

图 6 三体问题图释

现在已经知道，三体问题不能精确求解，即无法预测所有三体问题的数学情景，只有几种特殊情况已有研究结果。但即使是用数值解法，也不能得到稳定的解，因为初始值的一点波动都会导致解完全不同。庞加莱率先考虑了一个特殊的情况：在三个天体中有一个的质量与其他两个相比如此之小到了可以忽略其对另两个大天体运动的影响。这样，两个大的天体就可以看作是一个二体问题。而二体问题早在牛顿时代就已经圆满解决了。也就是说，它们可以按照开普勒定律绕着它们的质量中心作稳定的椭圆运动。然后把小天体加入到这个二体系统中，看这二体对小天体的影响。这样的三体问题称作是限制性三体问题。其方程从 9 个减少到 3 个。

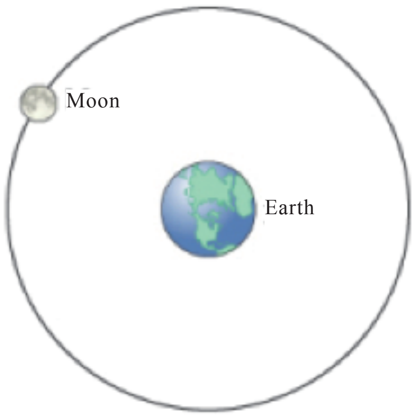

图 7 地球和月球在一个平面上

NASA 要研究的正是一个限制性三体问题，因为 NASA 关注的是在 1960 年代末的登月问题。而前人还没有找到一条让人造卫星飞向月球的路线。所以阿仁斯道夫所面对的三体就是 [4]：地球（E）、月球（M）和人造卫星（P）。显然，地球的质量远远大于月球的质量。而人造卫星的质量对地球和月球运动的影响可以忽略不计。这三体都被看作是点质量，并且是在同一个平面上。于是这个平面就可以被看作是一个复平面。假定这个三体系统的总重量为 1，月球的质量为 μ（$0 < \mu << 1$），则地球的质量为 $1-\mu$。取地球和月球的重心为坐标系的原点，则人造卫星的轨迹满足一个复常微方程

$$x''+2ix'-x=-\frac{(1-\mu)(x+\mu)}{|x+\mu|^3}-\frac{\mu(x+\mu-1)}{|x+\mu+1|^3},\quad x':=\frac{dx}{dt},$$

其中复数 $x(t) = x_1(t) + ix_2(t)$ 是人造卫星的位置向量。也就是说，阿仁斯道夫把问题简化到了一个方程和一个复变量的问题。当 $\mu = 0$ 时，这个方程的解描述的是经典开普勒运动：$x(t) = e^{-it}z(t)$，这里复函数 $z(t)$ 是方程 $z''(t) = -z(t)|z(t)|^{-3}$ 的一个特解。在一定条件下，这个解是一个周期解，即沿着一条椭圆轨道做周期运动。当 μ 在零点附近做小的扰动时，出现两种情况：一个是庞加莱发现的圆周运动，另一个就是阿仁斯道夫得到的解。假定椭圆轨道的半长轴为 a，离心率为 ε，在 $t = 0$ 时，$z(t) = a\cdot(1+\varepsilon)$，$z(t) = ic^*/ z(0)$，其中常数 c^* 满足 $c^{*2} = a\cdot(1-\varepsilon^2)$。它的轨道周期为 $T_0 = 2\pi|a^{3/2}|$。这

[4] R. Arenstorf, Periodic solutions of the restricted three-body problem representing analytic continuations of Keplerian elliptic motions. Amer. J. Math. 85 (1963) 27–35.