

从幼儿园小班到高中毕业，我国的青少年与数学打了大约 15 年的交道，进了大学的理工科，还要与高等数学打几年交道；如果将来的志向是当数学教授，则要打一辈子交道了。多年来由于奥数的大举入侵，数学似乎更成了成年前学生最花心血的一门学科。照理说，校园内外有这么浓厚的数学氛围，我们的学生应该是数学的宠儿了，但是我经常听说大学理工科的许多学生十分怨恨数学，也没有真正学好数学，包括数学系的那些理想是成为职业数学家的新生。

这是什么原因呢？我想一个原因是他们中的一部分人，学到大学阶段还不知道怎样学数学。我最近完成了一本书稿《南大数学七七级》，专讲我的同班学友的高考故事、大学经历，以及水到渠成的“远大前程”。在总共 15 章中，有一章专为我们的大中学生而写，标题为《怎样学习》，目的就是“传授”通过我班同学实践过并证明行之有效的一些学习方法，把我们青少年每天面临的“学习问题”拿出来研究一番，提供建议。

我在中国读到南京大学的硕士学位，后来留学美国密歇根州立大学获得博士学位。一眨眼，我已在美国一所大学的数学系任教快 29 年了。我上学较早，14 周岁高中毕业，在三个工厂当过五年的工人。我能荣幸成为七七级高考均分与天文系并列全校第一的南大数学系新生中的一员，这得益于我进厂学徒前，在三个月内从头到尾精读完“文革”前高中三年的 18 本数理化课本。可以说，我很早就经历自学而无师自通的实践，学会怎样读书，懂得掌握概念是学通数学的不二法门。进大学后，在全班强手如林并且人人苦读的氛围中，我循序渐进、稳打稳扎，配合数学与人文课内课外书籍的大量阅读，本科毕业时真正爱上了数学，走上了职业数学工作者的康庄大道。对怎样读好数学，我有点心得体会，甚至也有过思考。这篇文章的主要材料来源于上述的书稿，记录了我对如何学好高等数学的一些想法。

记得在我们读南京大学的大三第二学期时，刚进校不久的八〇级学弟学妹们久闻七七级学长的读书劲头和求知本领，专门安排了一个日子请了我班的几

$$\begin{aligned} \hat{I}(V(x)) &= \int_a^b (P(x)y'' + Q(x)y' - z(x)y) dx + 2 \int_a^b V(x) \sqrt{(P(x)y' + Q(x)y)^2} dx \\ &+ \int_a^b P(x)V'(x) dx - \int_a^b Q(x)V'(x) dx \\ \therefore \int_a^b [P(x)y' + Q(x)y] V dx &= -P(x)W' + Q(x)W + \int_a^b (PW' + QW) dx \\ &= \int_a^b (P(x)y'' + Q(x)y' - z(x)y) dx + 2 \int_a^b V(x) \sqrt{(P(x)y' + Q(x)y)^2} dx \\ &- 2P(x)W'(x) + 2Q(x)W'(x) + \int_a^b P(x)V'(x) dx - \int_a^b Q(x)V'(x) dx \\ \downarrow \text{利用 } W(x) &= \frac{Q(x)}{P(x)} - \frac{Q'(x)}{P(x)^2} W(x) \\ &= \int_a^b (P(x)y'' + Q(x)y' - z(x)y) dx + 2 \int_a^b V(x) \sqrt{(P(x)y' + Q(x)y)^2} dx \\ &- 2P(x) \left(\frac{Q(x)}{P(x)} - \frac{Q'(x)}{P(x)^2} \right) W(x) + 2P(x) \left(\frac{Q(x)}{P(x)} - \frac{Q'(x)}{P(x)^2} \right) W(x) \\ &= \int_a^b (P(x)y'' + Q(x)y' - z(x)y) dx - \int_a^b [P(x)y'' + Q(x)y' - z(x)y] dx \\ &+ \frac{2Q(x)}{P(x)} [V(x) + W(x)]^2 - 2P(x) \frac{Q'(x)}{P(x)^2} [V(x) + W(x)]^2 - \frac{2Q(x)}{P(x)} W(x) + \frac{2Q'(x)}{P(x)^2} W(x) \\ &- 2P(x) \frac{Q(x)}{P(x)} [V(x) + W(x)] + 2P(x) \frac{Q'(x)}{P(x)^2} [V(x) + W(x)] + 2P(x) \frac{Q(x)}{P(x)} W(x) - 2P(x) \frac{Q'(x)}{P(x)^2} W(x) \\ &= \int_a^b [P(x)y'' + Q(x)y' - z(x)y] dx + \frac{2Q(x)}{P(x)} [V(x) + W(x)]^2 + \frac{2Q'(x)}{P(x)^2} [V(x) + W(x)]^2 + \frac{2Q(x)}{P(x)} W(x) - 2P(x) \frac{Q'(x)}{P(x)^2} W(x) \\ &- \int_a^b [P(x)y'' + Q(x)y' - z(x)y] dx - \frac{2Q(x)}{P(x)} [V(x) + W(x)] + 2P(x) \frac{Q'(x)}{P(x)^2} [V(x) + W(x)] + 2P(x) \frac{Q(x)}{P(x)} W(x) - 2P(x) \frac{Q'(x)}{P(x)^2} W(x) \\ \therefore W \text{ 是任意常数 } c \text{ 相应的变分问题} \\ I[y(x)] &= \int_a^b (p(x)y' + q(x)y - z(x)y) dx + \frac{2P(x)}{P(x)} [V(x) + W(x)]^2 + \frac{2Q'(x)}{P(x)^2} [V(x) + W(x)]^2 + \frac{2Q(x)}{P(x)} W(x) - 2P(x) \frac{Q'(x)}{P(x)^2} W(x) \end{aligned}$$

何炳生偏微分方程作业

$y = x^a y^a$ 若 x, y 轴正方向, 则圆锥反时针轴进行

解: 设 $x = a \cos \theta, y = a \sin \theta$
 $\dot{x} = -a \sin \theta, \dot{y} = a \cos \theta$
 $0 \leq \theta \leq 2\pi$

$$\int_C \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dx + \int_C (x^2 y^2 + x^2 y^2) dx$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{(-a \sin \theta)^2 + (a \cos \theta)^2} a d\theta + \int_0^{2\pi} (a^2 \cos^2 \theta \cdot a^2 \sin^2 \theta + a^2 \cos^2 \theta \cdot a^2 \sin^2 \theta) a d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} a d\theta + \int_0^{2\pi} 2a^5 \cos^2 \theta \sin^2 \theta d\theta$$

$$= a^2 \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \sin^2 \theta d\theta + a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos^2 \theta) \cos^2 \theta d\theta$$

$$= a^2 \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \sin^2 \theta d\theta - a^2 \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta + a^2 \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta$$

$$= a^2 \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \sin^2 \theta d\theta$$

解: 设 $x = a \cos \theta, y = a \sin \theta$
 $x^2 + y^2 = a^2 \Rightarrow a^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta = a^2 \Rightarrow \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$
 $\dot{x} = -a \sin \theta, \dot{y} = a \cos \theta$
 $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

$$\int_C \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dx + \int_C (x^2 y^2 + x^2 y^2) dx$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(-a \sin \theta)^2 + (a \cos \theta)^2} a d\theta + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (a^2 \cos^2 \theta \cdot a^2 \sin^2 \theta + a^2 \cos^2 \theta \cdot a^2 \sin^2 \theta) a d\theta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a d\theta + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2a^5 \cos^2 \theta \sin^2 \theta d\theta$$

$$= 0 + a^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 \theta - 2\sin^4 \theta) d\theta + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 \theta) d\theta + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta d\theta$$

$$= a^2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \frac{\pi}{2} \right) + a^2 \left(\frac{1}{2} \pi - \frac{1}{3} \pi \right) + \frac{1}{2} \pi a^2 = -\frac{1}{3} a^2$$

何炳生数学分析作业

个学习尖子为他们传经送宝，专讲怎样学习。

其实任何读书种子的学习方法都不是人人可以机械效仿的金科玉律。比如说我的大学同班同学田刚本科阶段做了两万道习题这种高强度的训练，会让今天的大学视为楷模而如法炮制吗？又比如说我另一个同学何炳生大学时的课堂笔记一滴不漏、做的习题一丝不苟，就一定成为成为研究型数学家的必备资质？如同婚姻配偶的幸福源泉所在，最适合自己的学习方法就是最好的方法。但是“盲目崇拜名人”总是我们这个文明古国久治不愈的一大病症，在人文社会科学里最为显眼。于是我们的百姓时常缺乏自信心，非要请那些社会贤人、公知分子为他们指点迷津不可，比如恳请这些成功人士开具一列从一到十的必读书目。这让鲁迅先生最感到讨厌了。就像不同的人有不同的指纹，不同的人有不同的学习方法。就拿四十年前我班同学来说吧，有的人读书精通概念，力求弄清思想；有的人读书猛做习题，设法熟能生巧；有的人读书专攻记忆，考试放在第一；有的人读书突围课本，游弋参考文献；有的人读书大处着手，细节忽略不计；有的人读书精雕细琢，不放蛛丝马迹。如此种种，各有各的优势和弱项。比方说，透彻理解概念和思想的学生，将来成为创造型研究家的几率较大。但如果他们平时练习不够，或不喜爱机械记忆，很有可能其成绩单不够漂亮，不能唬人。成绩单在学校，尤其是中国的学校，可是个衡量学业质量的最重要的凭证呀。

我的师爷约克 (James Yorke) 教授就是藐视“成绩决定论”的一个人物。2015年的7月初，在庆祝我的博士导师、他的博士弟子李天岩教授70寿辰的学术研讨会上，我和他曾经就教育问题有过一次畅谈。谈话的内容后来被我写进一篇文章《约克教授谈教育》，登载于那一年最后一期的《数学文化》上。约克教授给我看过他高中时期的成绩单，上面四年的数学成绩全在90分以下。

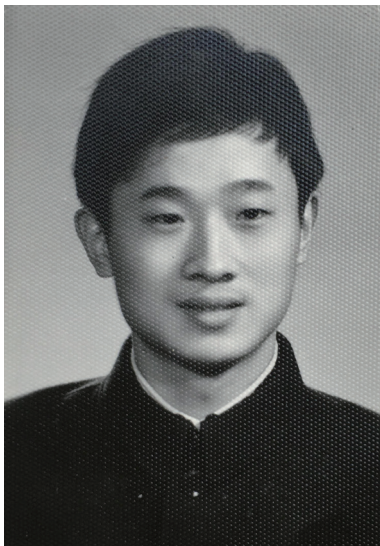


约克、李天岩、丁玫三代同堂

但是他自豪地告诉我：“我从高中就学会了怎样学数学。”这就能解释中学数学没有A的他，居然在全州的高中数学竞赛上获得第三名。到了大学，约克的成绩自称“没有B”，他来自台湾的博士生李天岩，自然中国式地推理下去：“全是A。”但是导师却笑眯眯地回答道：“C或者C以下。”那这个成绩单拿不出手的美国小子，后来怎样成为世界闻名的混沌学大师的呢？我在下面将再回头来阐述他关于“怎样学习”的有启发性的思想。

学习真的是和下棋一样存有妙着吗？象棋大王胡荣华的一着妙棋可以马上置对方于死地，而迫使对手俯首称臣。如果读书学习也有这样的魔戒套指，这样的魔戒如果真能从《指环王》的银幕跳下来戴上数学家爸爸的右食指，他首先会迫不及待地魔法施展于他的儿子或女儿身上。可是我们既没有听说过欧拉的子女中有一位数学家，也没有耳闻过陈省身的子女与数学为伍（当然他的女儿嫁给了一位卓越的低温超导物理学家朱经武），却知道丘成桐的两个儿子都与生命科学结下了不解之缘，且学业精湛。所以，断言“数学家的儿子也是数学家”之不成立，无可辩驳地证明了这个事实：绝对真理性的行之有效的学习方法是不存在的。这是多么令人沮丧的事实啊！然而它却和永动机或长生不老丹之不存在，都是一样的铁的事实。

但是，没有放之四海而皆准的“学习方法”，并不意味着不存在可以用来回答“怎样学习”这一难题相对而言行之有效的一些行动准则。我在工厂的年代，读过一本北京大学中文系编写的教材《写作基础知识》，被其中引用的朱自清、曹禺等写作高手描写春天的佳句所吸引，差点立志要成为文学家。古人语：“熟读唐诗三百首，不会吟诗也会凑。”对于人文学科，多读就会能写。但是这一法则并不一定是学好理科尤其是数学的一条捷径。虽然对于学好数学而言，多读书多做习题不是坏事，也是常被强调的基本手段。但问题是怎样多读书，怎样多做习题。是囫圇吞枣地多读书，不求甚解，或是机械性地多做题，不加思索？许多人尤其是青年学生经常茫然于“学习的方法论”，困惑于“不得要领”的读书实践，或痛苦于“事倍功半”的时间流逝。然而精通任何一门学科，都



丁致大学毕业照

有几个基本原则可循，都有某些经验体会可谈。现在，我们着重探索一下“怎样学习”这一大中学校年轻学子很感兴趣的论题。我将采用我的同学故事为我表达的观点提供客观例证。实际上，下面的经验之谈或基本观点大都来自于我班同学的亲身体会，也深得我的共鸣。所以有些标号为“我的”观点，实际上也是“我们的”观点。

我的大学同学翟灿芳小学六年级时就拿过全县的算术比赛第一名。1963年考入初中后，他的数学在学校遥遥领先。尤其是学到平面几何的那个学期，很多同学找不到北，他却是如鱼得水。到后来他的老师解不出来的数学题也来问他，他都能一一解出来。于是同学们叫他“小华罗庚”。风头正

盛的翟灿芳被校长请到了全校大会上讲讲他是如何学好数学的。无论他怎么绞尽脑汁地想，他也不知道是怎样学好数学的。最后他只好胡乱地编出类似于“愚公移山”的励志故事。这和社会和舆论都一致推崇的“笨鸟先飞”的说法，基调完全是步伐一致的。

几十年后，当翟灿芳和我聊起这段往事时，他用了“胡说”二字，对他在初中大会上传授愚公移山的学习法宝这个历史事件定了性。然后他下了这样的结论：“其实兴趣和天资是最重要的。”

翟灿芳已经替我们给出了回答“怎样学习”这个问话的先决条件：首先是兴趣大于一切，其次天资也是导致成功的关键因素。兴趣决定爱好，而按照郭沫若先生的观点，“爱好出勤奋，勤奋出天才”。前五个字我想人人都会同意的。原因很简单，缺乏爱好就会产生惰性，哪能产生勤奋之力？但是后五个字不一定个个都赞同。比如他年轻时的好朋友胡适可能就不相信“勤奋”是天才涌现的充分条件。在这一点上我和翟灿芳都是站在胡适这一方的。但是我认为反过来却是对的，即勤奋是出现天才的必要条件。胡适博士的天才观在他给吴健雄的短信里说得清清楚楚：

凡治学问，功力之外，还需要天才。龟兔之喻，是勉励中人以下之语，也是警惕天才之语，有兔子的天才，加上乌龟的功力，定可无敌于一世，仅有功力，可无大过，而未必有大成功。

或许郭沫若与胡适实际上是“英雄所见略同”的，只不过在那个宣扬“奴隶创造历史”的特殊时代，他不敢明确地表达自己的观点罢了。

当年我在国内当学生的时候，读到的名人采访记或回忆文章，总把自己事业上的巨大成功说成是勤学苦练的结果。这固然说得不错，没有这个必要条件，成功只是黄粱美梦。但是这些功成名就者有意或无意地隐瞒或忽略了最关键的必要