

我们必须知道，我们必将知道

陈关荣

Wir müssen wissen, wir werden wissen(我们必须知道,我们必将知道)——这是大卫·希尔伯特 1930 年退休感言的结束语,镌刻在哥廷根城市墓地(Stadtfriedhof Göttingen)里他那简单墓碑的下方。



2015 年 9 月 10 日, 本文作者在哥廷根参拜了希尔伯特墓地

大卫·希尔伯特(David Hilbert, 1862-1943)出生于东普鲁士的哥尼斯堡(Königsberg)附近。哥尼斯堡是哲学家康德的故乡,也是欧拉研究七桥问题和数学家雅可比任教的的地方,现在归属俄罗斯。1880年,希尔伯特违背了父亲让他读法律的意愿而进入哥尼斯堡大学学习数学,师从林德曼(Carl von Lindemann, 1852-1939),22岁获得博士学位。之后留校任教,31岁晋升正教授。1895年,希尔伯特转入哥廷根大学(全称是Georg-August-Universität Göttingen)任职教授,在那里度过了余生,于1943年辞世。他曾获俄罗斯罗巴切夫斯基奖和瑞典科学院 Mittag-Leffler 奖,1942年当选为柏林科学院荣誉院士。



希尔伯特

希尔伯特是历史上最卓越的数学家之一，在不变量理论、代数数论、积分方程、变分法、泛函分析、数学和几何学基础、数学物理等领域中作出了十分重要的贡献。今天，“希尔伯特空间”“希尔伯特变换”“希尔伯特矩阵”“希尔伯特曲线”等冠以其名的术语和他那有趣的“希尔伯特旅馆悖论”均广为人知。

1900年，38岁的希尔伯特在巴黎举行的第二届国际数学会议上以“数学问题”为题的演讲中提出了23个重要的数学难题，即众所周知的“希尔伯特问题”，激励和推动了后来一个多世纪许多数学分支的蓬勃发展。简而言之，希尔伯特的第1-6问题关于数学基础理论，第7-12问题关于

数论，第13-18问题属于代数和几何，而最后的第19-23问题属于数学分析范畴。经过许多数学家长期的努力，目前大多数问题都得到了完全或部分解答。鉴于他本人的研究兴趣和当时的历史条件，希尔伯特问题中未能包括拓扑和微分几何等重要领域的数学问题，也基本上没有涉及应用数学和计算数学。当然，没有人会苛求希尔伯特用23个问题去涵盖浩瀚的数学分支和内容。实际上，二十世纪数学的发展远远超出了希尔伯特当时的设想。

希尔伯特的第二问题是有名的“判定问题”。它至关重要，涉及整个数学基础，关心数学是否完备和一致？是不是所有数学命题都可以通过有限次正确的数学步骤作出判定？希尔伯特雄心勃勃，要将整个数学体系严格公理化，然后用他的所谓“元数学”（证明数学的数学）来证明整个数学体系是坚不可摧的。为了这个目标，他制定了一个后人称之为“希尔伯特计划”的部署：首先，将所有数学形式化，把每一个数学陈述都用符号来表达。然后，证明整个数学系统是完备的，即对任何一个数学陈述都存在一个数学证明。同时，还要证明数学是一致的，也就是说绝不存在自相矛盾的陈述。最后，还要有一个可以实现的算法，通过有限步程序最终判定数学陈述的对错。显然，这是一个野心勃勃的宏图大计，但希尔伯特并不认为它是不可能的。他非常自信，断言“不存在不可解的问题”。

遗憾的是，“希尔伯特计划”在他1930年光荣引退后随即惨遭失败。1930年9月7日，时年25岁的哥德尔（Kurt Friedrich Gödel, 1906-1978）发表了著名的“不完备性定理”：“如果数学是一致的，那么它就是不完备的”。具体地说，哥德尔证明了：任何一个包含算术系统在内的数学系统不可能同时是完备的和一致的。换句话说，人们如果能在一个数学系统中做算术的话，那么这

个系统或者是自相矛盾的，或者存在一些结论在这个系统内是无法证明的。其次，他证明了，对于任意一个包含算术系统的数学系统来说，不可能在这个系统内部证明它本身的一致性。哥德尔的结论对当时整个数学界来说无疑是一次颠覆性的冲击。希尔伯特别无选择，旋即对计划作了修正，取消了有限步骤这个约束。随后，根茨（G. Gentaen, 1909-1945）于1936年使用某种非形式化方法（超限归纳法）证明了算术公理系统的一致性。虽然这一切与希尔伯特的初衷有别，但是他的元数学、形式化和证明论的基本思想依然深刻地影响了许多后世数学家。

谈论希尔伯特不能不提及哥廷根大学和哥廷根数学学派。

哥廷根大学属于德国，却是由英王乔治二世于1734年创立的，初期以法学闻名于世，被称为“法科大学”，培养出许多杰出的政治家、哲学家、语言学家和教育家，如奥地利首相克莱门斯·梅特涅（Klemens von Metternich, 1773-1859）、柏林大学创立者威廉·洪堡（Wilhelm von Humboldt, 1767-1835）、大诗人海因里希·海涅（Christian Heine, 1797-1856）、文学巨匠格林兄弟（Jacob Grimm, 1785-1863 和 Wilhelm Grimm, 1786-1859）、哲学家亚瑟·叔本华（Arthur Schopenhauer, 1788-1860）以及社会学家马克斯·韦伯（Max Weber, 1864-1920）和尤尔根·哈贝马斯（Jürgen Habermas, 1929-）等。此外，德意志帝国“铁血宰相”奥托·俾斯麦（Otto von Bismarck, 1815-1898）也是该校毕业生。法国统帅拿破仑（Napoléon Bonaparte, 1769-1821）曾在此研习法律，说“哥廷根是属于全欧洲的。”哥廷根大学著名校友中还有中国的著名学者季羨林，他1937年在该校求学时兼任汉学系讲师，于1941年获博士学位。

除了法学和哲学之外，哥廷根大学更是世人瞩目的自然科学和文化中心，以倡导学术自由和独创风格闻名于世。这种学风和治学精神使她一度成为培育世界级科学巨匠的摇篮，先后有47位诺贝尔奖得主在此读书毕业、秉职任教或长期访研，主要为物理和化学奖，并有一些医学、和平以及文学奖。最近获得诺贝尔奖的有2013年生理学奖得主 Thomas C. Südhof（1982年哥廷根大学神经化学博士）和2014年的化学奖得主 Stefan W. Hell（时任哥廷根普朗克生物物理化学研究所所长）。

回顾哥廷根大学二百八十多年的历史，可知她在十九和二十世纪达到鼎盛，出现过电磁学家威廉·韦伯（Wilhelm Eduard Weber, 1804-1891）和原子弹之父罗伯特·奥本海默（Julius Robert Oppenheimer, 1904-1967），以及二十多个物理诺贝尔奖和十多个化学诺贝尔奖得主的教员和学生，包括熟知的赫兹（Heinrich Hertz, 1857-1894）、普朗克（Max Planck, 1858-1947）、哈恩（Otto Hahn, 1879-1968）、玻恩（Max Born, 1882-1970）、德拜（Peter Debye, 1884-1966）、泡利（Wolfgang Pauli, 1900-1958）、海森堡（Werner Heisenberg, 1901-1976）和费米（Enrico Fermi, 1901-1954）。哥廷根大学的数学成就同样灿耀无比，在那里群星荟萃，出现过许多数学大师，包括高斯（Carl Friedrich Gauss, 1777-1855）、狄利克雷（Johann Dirichlet, 1805-1859）、黎曼（Bernhard