

Furstenberg 与 Margulis 获颁 2020 年阿贝尔奖

The Norwegian Academy of Science and Letters

■ 整理：陆柱家 校对：童欣

1. 颁奖词

挪威科学与文学院决定将 2020 年的阿贝尔 (Abel Prize) 奖授予来自以色列耶路撒冷的希伯来大学的希勒尔·弗斯滕伯格 (Hillel Furstenberg) 和来自美国康涅狄格州纽黑文市的耶鲁大学的格雷戈里·马古利斯 (Gregory Margulis), “表彰其率先提出并在群论、数论和组合学中使用概率论和动力系统的方法”。

详细引文

概率论的一个中心分支是对随机游动的研究, 例如, 一位探索未知城市路线的旅行者, 通过扔硬币来决定在每个十字路口向左转还是向右转。Furstenberg 和 Margulis 发明了类似的随机游动方法, 用于研究线性群的结构, 例如, 线性群是在乘积与求逆运算下封闭的矩阵集合。通过随机选择矩阵的乘积, 人们试图描述结果是如何增长的, 以及这种增长对群结构的意义。

Furstenberg 和 Margulis 提出了富有远见且强有力的概念, 解决了棘手的问题, 并发现了群论、概率论、数论、组合数学和图论之间令人惊讶且富有成果的联系。他们的工作创立了一种思想流派, 该流派对数学及其应用的许多领域产生了深远的影响。

1963 年, Furstenberg 从研究矩阵的随机乘积出发, 提出了一个至关重要的概

参考 <http://www.abelprize.no/>, 整理并修改该网页上的中文稿。挪威科学与文学院准予本文出版。本文将刊于《数学译林》2020 年第 1 期。为了适应大众传播需要, 本文通讯转载时略作了文字修改。

念,并对其进行了分类,现在称为 Furstenberg 边界。他利用这一概念,给出了一个泊松型公式,以其边界值表示一般群上的调和函数。在上世纪 60 年代初与 Harry Kesten 合作进行的关于随机游动的研究中,他还获得了一个关于最大李雅普诺夫指数的正定性的重要准则。

1967 年, Furstenberg 受到丢番图逼近的启发,提出了遍历系统不相交的概念,该概念类似于整数的互素。事实证明,这一自然概念极其深入,可应用于广泛的领域,包括电气工程中的信号处理和滤波问题、分形集的几何结构、齐次流和数论。他的“ $\times 2 \times 3$ 猜想”是一个非常简单的例子,它带来了许多进一步的发展。他考虑了在复单位圆上取平方和立方的两个映射,证明了这两个映射下唯一不变的闭集是有限的或整个圆。他的猜想指出,唯一的不变测度是有限的或旋转不变的。尽管许多数学家做了很多努力,但这个测度分类问题仍然未解决。

对按群表示不变测度的分类已经发展成为一个广泛的研究领域,该领域对量子算法的遍历性¹、平移曲面 Margulis 对 Littlewood 猜想的看法以及 Marina Ratner 的惊人研究成果均产生影响。考虑到几何对象中的不变测度, Furstenberg 于 1972 年证明了双曲型曲面极限圆流的唯一遍历性,该证明衍生出许多结果。

1977 年, Furstenberg 借助遍历理论和他的多重回复定理,对 Szemerédi 关于在正密度整数子集中存在任意长的算术级数的定理给出了令人震惊的新证明。在随后与 Yitzhak Katznelson、Benjamin Weiss 等人的合作中,他发现了 Szemerédi 定理更高维的和深远的推广,以及拓扑动力系统和遍历理论在 Ramsey 理论和加性组合学中的其他应用。这项工作影响了许多后来的发展,包括 Ben Green、陶哲轩和 Tamar Ziegler 关于哈代 - 利特尔伍德猜想和素数算术级数的工作。

¹ quantum arithmetic ergodicity, 似为“量子算术遍历性”更妥。——编注