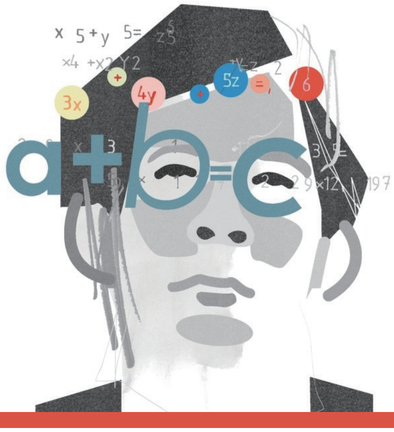


ABC 猜想与望月新一

陈泽坤

2020 年 4 月 3 日，经过了漫长的审稿历程，望月新一关于 ABC 猜想的 600 页证明终于被日本京都大学的数学杂志 *Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences* 接受了。这在望月新一与 ABC 猜想的一系列故事里，也可以算得上是一个重要事件了。然而故事还远没有结束，以彼得 • 舒尔茨（Peter Scholze）和雅各布 • 斯蒂克斯（Jakob Stix）为首的数学家们仍然对他的证明充满怀疑，这也意味着他的证明距离得到数学界的公认——从而成为一个“定理”，还有很长的路要走。

在深入了解这些数学界八卦之前，我们不妨先费一些笔墨，来了解一下 ABC 猜想究竟讲了一件什么事情。我们在这里并不会涉及到多么复杂的数学，因为 ABC 猜想背后的哲学出奇地简单。

我们先来看两个问题：

问题 1. 考虑问题

$$x^n + y^n = z^n.$$

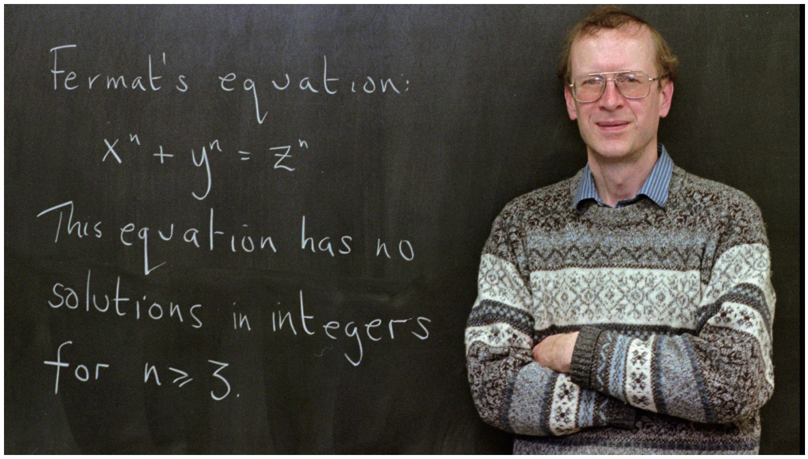
找出它所有的满足 $n \geq 3$ 的正整数解。

问题 2. 考虑问题

$$x^n - y^m = 1.$$

找出它所有的满足 $n,m \geq 2$ 的正整数解。

第一个问题就是大名鼎鼎的费马大定理，而第二个问题同样名气不小，它叫卡塔兰猜想（Catalan's conjecture）。费马大定理在 1637 年被费马提出来，到了上世纪 90 年代被怀尔斯证明了出来；卡塔兰猜想是 1844 年被提出来，一直到 2002 年才被米哈伊列斯库（Preda Mihăilescu）所解决。所以今天我们都知道两个问题的答案了：卡塔兰猜想只有一组非平凡的解，它是 $3^2 - 2^3 = 1$，其余就再也没有了；而费马大定理则是一个非平凡的解也没有。有了这两个结论，我们再回过头来看看这两个式子。不论是在费马大定理，还是在卡塔兰猜



怀尔斯

想中，都似乎隐藏着一个规律：两个很高次幂的数加起来，似乎很难还是一个很高次幂的数！我们不如把一切事情都做得更一般一点。

我们要研究的就是这样一个等式

$$A + B = C.$$

一方面，我们有一个量来描述这个式子有多“大”，很简单，我们说 $A + B = C$，这个“等于 C”的数当然就描述了这个式子有多大，我们把它叫做这个等式的大小。但是另一方面，从一个数论工作者的眼中，也可以用另一种方式来描述这个式子有多复杂：这个式子里出现了多少素因子？我们把 A，B，C 三个数都分解素因子，然后把所有出现的素数都乘起来，我们把它叫做这个等式的“根”。无论 A，B，C 乘了多少次方，它的根都不会变，也就是“根”的意思，即开根。下面这张表展示了一些等式的根与大小。

等式	根	大小
$3^2+4^2=5^2$	30	25
$7^2+24^2=25^2$	210	625
$3+5^3=2^7$	30	128
$11^2+3^2\cdot5^6\cdot7^3=2^{21}\cdot23$	53130	48234496
$x^n+y^n=z^n$	$\le xyz$	z^n

看起来随着式子越来越大，这两个量都会越来越大。我们想问，这两个量会不会是同一个量级呢？一方面，根据定义，根一定不会超过大小的平方。另一方面，如果只看定义，根似乎也可以非常小，只要 A，B，C 三个数都是小素数的高次幂。然而由这些例子，似乎它也不会太小。ABC 猜想就是在说这样一件事：一般而言，根是会比大小大的。这个规律可能会有反例，但是这些反例一定非常稀少：