

与沃尔什函数共舞五十年

——纪念我的导师齐东旭教授

陈伟



齐东旭，男，1940年12月生于辽宁昌图。1963年毕业于吉林大学计算数学专业并留校任教。1988年至2000年，先后任北方工业大学CAD研究中心主任、副校长。2001年赴澳门科技大学任教，2013年退休。1980-1982年在美国威斯康辛大学数学研究中心（MRC）做访问学者，1991年在美国杨伯翰大学做访问教授，1994年应邀到罗马尼亚雅西大学数学系授课。2023年2月，在南京逝世。

曾任《计算机学报》《计算机辅助设计与图形学学报》《中国图像图形学报》等杂志的编委，浙江大学CAD&CG国家重点实验室学术委员会委员，中国科学院CAD开放实验室学术委员，中国工程图学会计算机艺术专业委员会主任，中国数学奥林匹克委员会等，曾任第31届国际数学奥林匹克竞赛协调委员会主席。

先后获全国科学大会奖（1978）、航空部科技成果三等奖（1983）、广播电影电视部科技进步二等奖（1993）、中国有色金属总公司科技进步二等奖（1994）。曾荣获首都劳动奖章（1992），多次获优秀教师称号。2010年获中国计算机图形学贡献奖，2013年获中国工业与应用数学学会“几何设计与计算杰出贡献奖”。

2023年2月4日，这一天正是24节气中的立春之日，我敬爱的导师齐东旭教授安详去世。离开了他终生热爱的数学事业，离开了他无比眷恋的亲朋好友，也离开了他爱护有加的弟子学生。

今年恰逢也是美国数学家沃尔什（Joseph L. Walsh）发表著名的沃尔什函数（Walsh function）论文整整100周年。在齐东旭教授的学术生涯与研究成果中，沃尔什函数是占其研究时间最长的一项工作，前后持续了长达近50年之久。齐东旭教授是我的导师，囿于能力和水平，我无法对恩师的学术成就作出全面的总结评价。本文仅通过回顾齐东旭教授在沃尔什函数这一专题上的持续深入研究的历程，借此寄托对恩师的敬仰与感怀之情。

2023年2月4日，这一天正是24节气中的立春之日，我敬爱的导师齐东旭教授安详去世。离开了他终生热爱的数学事业，离开了他无比眷恋的亲朋好友，也离开了他爱护有加的弟子学生。



从沃尔什函数走来

在微积分的发展历程中，人们注重的是光滑的函数，众所周知的泰勒逼近和傅里叶分析便是其最为典型的代表。然而，到了上世纪初，人们的关注点大有改变，物理学及工程技术领域的热点话题是间断、跳跃、突变、跨音速、冲击波等。相应地，数学家对非连续函数的研究兴趣出现甚至可以说高涨起来。为了回答“是否存在非连续的完备正交函数系”这样的反问，美国数学家沃尔什提出了后人称呼的“沃尔什函数”¹。

与连续函数大为不同，沃尔什函数的取值非常简单，它仅取 +1 和 -1 两个值（如图 3 所示）。正因如此，其函数波形在这两个取值之间不断跳跃，看起来“叽里拐弯，忽上忽下，迈步不匀”。沃尔什函数的怪异形态与经典的微积分方法格格不入，导致人们对它望而却步。在提出后的许多年里，沃尔什函数一直默默无闻，不被人们重视。就连作者本人也并不欣赏自己的这一创造，也没估计到它的影响，表现在为庆祝他 70 寿辰而出版的论文集中，竟没有收入 1923 年发表的这篇论文。

然而，到了上世纪 70 年代，随着半导体技术及大规模集成电路的出现，从技术上可以实现沃尔什函数的电子发生器。有了物质基础的沃尔什函数在信号处理领域迅速掀起了一股热潮，人们一时群情激昂，通信、声呐、雷达、遥感、图像处理、语音识别乃至医学、天文、地质等，此前难于计算处理的若干技术难题，急切地寄托希望于这一新的数学工具予以解决。在哈尔姆斯（H. F. Harmuth）等人的鼓动下，国际上掀起的“沃尔什函数热”持续了近 10 年时间。连续召开有关的国际学术会议，甚至有人预言“沃尔什分析将导致一场革命，就像十七八世纪牛顿的微积分那样”。

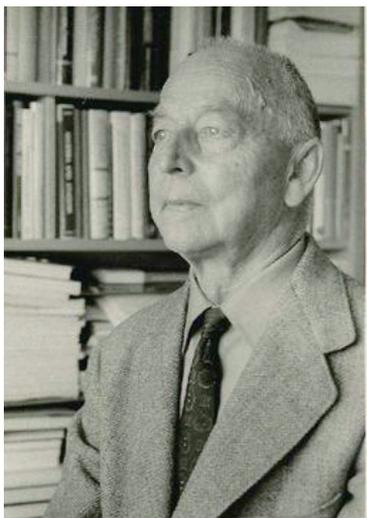


图 1. 沃尔什（1895-1973）

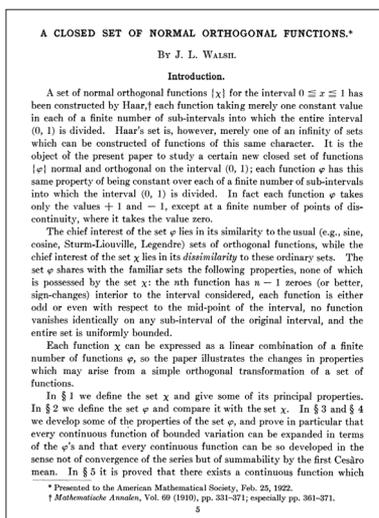


图 2. 沃尔什函数论文首页

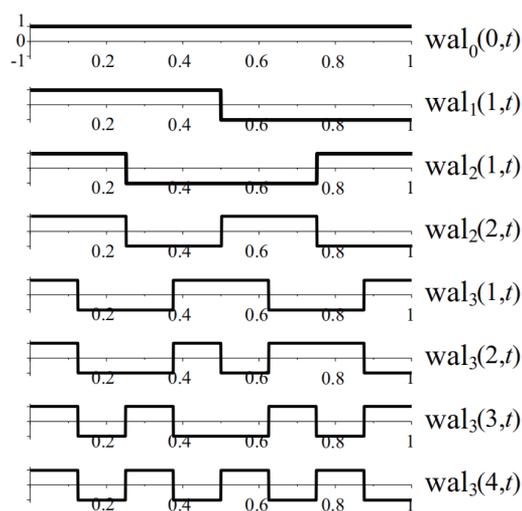


图 3. 沃尔什函数（前 8 个）

¹ Walsh J L. A closed of normal orthogonal functions. American Journal of Mathematics, 1923,45:5-24

事出偶然，初遇沃尔什函数

上世纪70年代中期，国内还处于文革期间，齐东旭被下放到吉林省伊通县的五七干校劳动改造。在那个特殊的环境下，国内外的学术交流基本中断。即使是国际上正如火如荼开展的研究热点，国内也几乎没有人知道。然而正是这个世界充满的偶然性，让齐东旭因缘巧合地遇到了沃尔什函数。事情的缘由是这样：1976年7月的一天，齐东旭正在干校农场劳动。农场的一位负责人在不远处喊道：“有谁呀？来一个。押车回校送苞米。”看到齐东旭离他最近，直接说到：“就你吧。”于是，齐东旭趁机回了一趟学校（吉林大学），顺便来到数学系资料室，这里也是数学系人经常聚集聊天的地方。

资料室有一名工作人员叫陈祖继，这人话不多，但是一贯热情心细地为大家服务。这天，他照样像往常一样，整理桌椅，预备开水，排好报纸等，同时也照例把外地寄来的各种邮件资料，放在显眼的地方供大家选用。在这些资料中，齐东旭偶然看到一个已被撕破的纸卷，上面除了印有抓革命促生产的口号外，还有某油田技术室字样。不仅如此，破损的纸上还印有模糊的数学公式和锯齿状图形。出于好奇，想仔细看看这上面究竟是什么内容。于是把这几张“破纸”带回了五七干校。

回到干校之后，随手将其扔在桌角。还没有来得及细看，第二天凌晨四点多，便发生了震惊中外的唐山大地震。距离震中一千多里的伊通震感强烈，房屋摇晃得很厉害，那几张纸也被滚落到了地上。强烈的晃动震醒了熟睡中的齐东旭，迷迷糊糊醒来后的他没有立即冲出屋外逃难，而是下意识地捡起地上的一沓纸，并稀里糊涂地瞧了一眼。咦？石油、地震勘探、沃尔什函数……。就这样，齐东旭第一次接触了沃尔什函数。

此后，推公式、查文献、做笔记，齐东旭对沃尔什函数的了解不断加深，并萌生了对其推广的想法。

赴美访问，合作研究结硕果

1979年1月1日，中美两国正式建交。国门打开，一个重大的举措便是向国外派遣留学人员。齐东旭很幸运地入选中美正式建交后的第一批出国留学人员名单，并于1980年1月来到美国威斯康辛大学数学研究中心做访问学者。

在此之前的70年代中后期，齐东旭的主要研究领域是样条函数，发表了系列论文，并协助李岳生撰写完成《样条函数方法》一书。此书于1976年定稿，1979年由科学出版社出版，并被列为“计算方法丛书”（主编：冯康。现已更名为“信息与科学计算丛书”）的第一本，对我国当时的样条函数研究起到了积极的推动作用。

当齐东旭接触了沃尔什函数之后，很自然地想到将其与样条函数联系起来，从分段多项式的观点研究沃尔什函数。因此，他特意带上自己学习沃尔什函数所作的几本笔记，以及研究课题《把沃尔什函数推广到任意 k 次多项式》，启程去了美国。



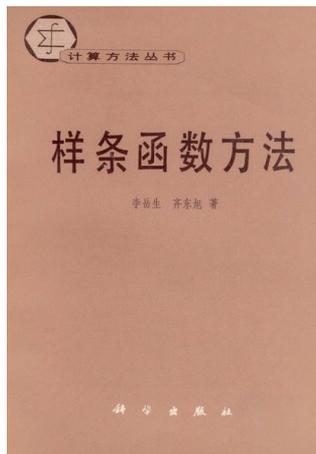


图 4.《样条函数方法》



图 5. 齐东旭与样条函数理论奠基者 Schoenberg (中) 及 Carl de Boor (右) 在威斯康辛大学数学研究中心 (1980 年)

几乎同时到威斯康辛大学数学研究中心 (MRC) 访问的, 还有另外两名内地来的学者。一位是湖南大学的周叔子, 另一位是中国科学技术大学的冯玉瑜。巧合的是, 周、冯、齐三人都出生于 1940 年, 属龙, 并且性情相投, 常在一起热烈讨论数学问题, 被大伙称为“MRC 三剑客”。有一天, 三人聚在一起聊到科研选题。此时冯玉瑜和齐东旭两人正处于科研互补的阶段: 冯玉瑜正在为寻找满意的课题焦急, 而齐东旭因论证一条引理未果而上火。在周叔子的建议下, 冯齐二人随即开始了 U- 系统的合作研究。

所谓 U- 系统, 是将沃尔什函数推广到任意 k 次 (k 为非负整数) 多项式之后, 得到的一类完备正交分段多项式函数系, 而通常的沃尔什函数只是当 $k = 0$ 时的特殊情形。在 MRC 期间, 冯齐合作完成了 U- 系统的基础理论研究。据齐东旭生前回忆, U- 系统的主要定理诞生于 1980 年圣诞节前夕的一个暴风雪之夜。1981 年首次在 MRC 公开报告², 并于同年投稿至 *SIAM Journal of Mathematical Analysis* (1984 年正式发表³)。同时也在国内的中国科技大学学报和吉林大学学报上发表相关结果。

U- 系统既可以看作将沃尔什函数向高次推广的结果, 同时也可以看作将传统正交多项式向分段情形的推广。U- 系统的建立, 将原本很多看似无关的工作有机地联系起来, 包括沃尔什函数、样条、多项式、正交函数、分形、小波等。这里, 仅举 U- 系统与小波分析的关联为例来说明。

众所周知, 小波分析是调和分析的重大发展, 它被认为是傅里叶分析方法的突破性进展。小波分析方法可以追溯到 20 世纪初哈尔函数 (Haar function)

² Feng Y Y, Qi D X. A Sequence of piecewise orthogonal polynomials. MRC Technical Summary Report 2217,2229. Mathematics Research Center, University of Wisconsin- Madison, 1981.

³ Feng Y Y, Qi D X. A Sequence of piecewise orthogonal polynomials. *SIAM Journal of Mathematical Analysis*, 1984, 15(4): 834-844.

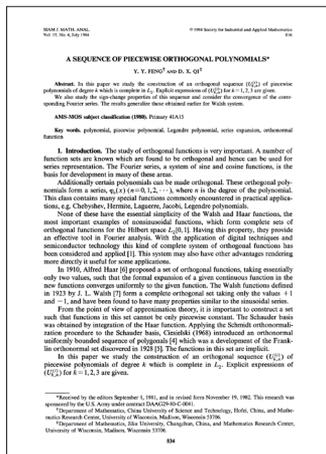


图 6. U-系统论文首页



图 7. 齐东旭与冯玉瑜（左）

的建立,不过真正的小波热开始于1986年,其导火索是法国数学家梅耶尔(Yves F. Meyer)——他因在小波分析理论发展中做出的重要贡献,2017年获得阿贝尔奖——意外地构造出了具有一定衰减性的光滑函数,其二进伸缩与平移构成规范正交基。它的出现无论是在数学领域,还是在工程应用领域都引起了一场轩然大波。事实上,U-系统中已包含了小波的关键“基因”,即通过对母函数的压缩及平移变换而形成正交基底。因此,当小波分析兴起之后,美国数学家米恰里(Charles A. Micchelli)等人将U-系统称为“预小波⁴”。上世纪90年代,国际上曾经掀起一阵预小波的研究热潮,与U-系统有着紧密的关系。

激情岁月,理论应用齐展翅

1982年1月,齐东旭结束两年的留学之旅,按期回国。当时正值国际上计算机辅助设计(CAD)及计算机辅助制造(CAM)火热的时期。在那个“激情燃烧的岁月”,大家急切地想把在国外学到的先进东西引进国内,而不仅仅停留于原有的研究方向。正是基于这个想法,齐东旭加入了全国计算几何协作组,成为最早期的成员之一。

计算几何协作组由著名数学家苏步青先生于1982年1月倡导成立,成员来自复旦大学、浙江大学、山东大学及吉林大学等单位。它为开创我国计算机辅助设计与计算机图形学等新的学科方向奠定了坚实的理论基础,对我国早期制造业等领域的信息化建设与发展具有奠基性的推动作用并产生了深远影响。

在苏步青先生的脑海中,学术研究总是和人才培养联系在一起。于是,苏



⁴ Micchelli C A, Xu Y S. Using the matrix refinement equation for the construction of wavelets on invariant sets. Applied and Computational Harmonic Analysis, 1994, 1(4):391401.