



江湖中流传的“犹太问题”

——一段不太为人所知的数学往事

王淑红 蒋迅

1 什么是“犹太问题”

“犹太问题”(Jewish problems),也称为“棺材问题”(coffins problems)或“杀手问题”(killer problems),是江湖中流传的一类数学问题。Coffins一词是从俄语直接翻译过来的,英文中一般称为killer problems。¹单纯从这类问题的名称,我们就可以嗅到某种不和谐的气息。实际上,“犹太问题”是横亘在苏联犹太人心中的一道伤痛,真的暗藏玄机,只是披上了一层隐蔽的外衣。

“犹太问题”是保密的,其答案亦是不公开的。其目的明确、独具特点,在某些时期被苏联掌权者当作口试测验题来选拔人才。具体而言,“犹太问题”是考官专门给犹太人或其他不受欢迎的人准备的,其特点是构思新颖、设计巧妙,很难使人想到答案,但是一旦看到答案,又使人恍然大悟:原来这么简单!²换言之,这些问题一般都能够用初等数学知识来解答,但是又令中学生们抓狂,因为即便是最优秀的中学生也几乎不可能很快找到答案,尤其是要求在口试中迅速求解更是雪上加霜,令人望而却步。

这个办法成为了当时苏联很多大学的法宝,行之有效地拒绝了很多犹太学生和其他不想要的学生步入其校门,即便是在全世界都享有盛誉的国立莫斯科大学也不例外。

¹ Robbie Gonzalez, How to solve "Jewish" math problems, <http://io9.com/5848752/how-to-solve-jewish-math-problems>.

² Tanya Khovanova, Alexey Radul, arXiv: 1110.1556v2, Jewish Problems, 2011.



这种做法明显是有失公正和公平的，相信所有人对这一点都会举双手赞成。管理者当然心知肚明，所以才为了不引起众怒，采用了这种隐蔽而间接的考试方式，一方面可以堂而皇之地把犹太人和其他不想要的人拒之门外，另一方面又可以置身事外，不会遭受人们的抱怨或责难，也不会使他们的这种丑行昭然天下，可谓两全其美，为了达到这种不可告人的目的也是煞费了一番苦心。可怜的只是那些特定的人群，他们不得不面对命运的捉弄，与自己青睐的名校失之交臂。

果真如此吗？如若事实真是如此，岂不悲哉！我们在阅读这些历史素材的时候一直带着这样的诘问。种种的蛛丝马迹一次次让我们不敢相信又不得不相信这是一个客观的存在。不过，这就是历史，就像在惊涛骇浪中航行的船只，从来也不缺乏曲折的故事。仿佛只有这样来理解，我们才能平复纠痛的心绪，重回内心的安宁和淡静。那么“犹太问题”是缘何产生的呢？

2 “犹太问题”产生的历史根源

众所周知，二次大战时期，纳粹德国对犹太人的驱逐和屠杀是惨绝人寰的，造成很多犹太人死亡或流亡他国。其实，自古以来，在欧洲就有着浓烈的反犹太思潮和运动。掀开那些历史的碎片，哀鸿遍野、鲜血淋漓，相信举凡善良的人们，其身体和灵魂都会不自觉地颤栗和惊悚，以致不忍卒读。

近代反犹太主义的先河是由俄国与巴尔干半岛开启的。沙俄把反犹太主义定为国策，制定了诸如限制犹太人的住地，禁止犹太人购买土地和从事农业，不许犹太人在军队、邮政、铁道等部门供职，甚至不断掀起侮辱、打压和迫害犹太人的浪潮。而后这种思潮发展到欧洲的奥匈帝国以及法国等国家，并继续在欧洲不断兴起和汇聚，最终在希特勒统治下的德国达到顶峰。1933-1945年期间的纳粹大屠杀共造成大约600万犹太人凄惨离世。这种泯灭人性和惨无人道的杀戮受到了全世界人民的声讨。而这也说明反犹在苏联是有历史根源的，但同时也是不得人心的。犹太人的历史境遇时好时坏。他们为何在历史上受到如此惨无人道的杀戮呢？为什么即便在作为犹太人的共产主义者列宁缔造的苏联，反犹运动也并未完全停止呢？

苏联是一个社会主义国家，在宪法里明文规定了人人平等，而且共产主义的先行



者马克思和列宁都是犹太人，所以不太容易让人想到苏联在一定时期会有反犹举动。但历史不是按照我们常人的思路来发展，虽然列宁不会做出反犹太的举动，但从斯大林主政开始，苏联再度兴起了反犹思潮。据说，有一次，苏联的第30飞机制造厂发生了一起群体性事件，党委系统和国家安全部门向斯大林汇报说是几个犹太人带头闹事。斯大林说：“应组织一些身强力壮的工人，让他们手持木棒，在干完一天的活下班时，把这些犹太人狠狠揍一顿。”据2011年公开的克格勃资料³，列宁的半犹太裔身份在其去世时并未被透露。1932年，斯大林得知后压住了这个消息，并在不久后开始清理高层的犹太人。据罗伊·梅德韦杰夫在《让历史来审判——论斯大林和斯大林主义》中说：“斯大林到了晚年，几乎抛却了各种意识形态的伪装，把对犹太人的迫害公然上升为国家政策的一部分。”我们在这里不去详细探讨这个历史问题。我们只要知道在苏联确实有过这种反犹的思潮。一个人或者一个民族的生存和发展往往与其自身经历密不可分。中国有句古话：天将降大任于斯人也，必先苦其心志，劳其筋骨，饿其体肤，空乏其身。这种恶劣的生存环境将不少苏联犹太人锻造得异常坚韧、勇敢和刚毅，使他们在有历史机遇时，迅速脱颖而出，比如，传媒大亨古辛斯基（Vladimir Gusinsky）⁴。

实际上，犹太人的聪慧世界闻名。犹太人具有读书成人的文化传统和思想精髓，在人类历史的几乎各个领域都抒写了光辉璀璨的历史。他们虽然在世界上只占到极少数，但是获得诺贝尔奖的犹太人却占到总获奖人数的四分之一左右。我们可以信手举出很多从犹太民族走出的杰出人物：维纳（Norbert Wiener）、埃米·诺特（Emmy Noether）、冯·诺依曼、韦伊（André Weil）、盖尔范德（Israel Gelfand）、佩雷尔曼等数学家；爱因斯坦、玻尔（Niels Bohr）、玻恩（Max Born）、奥本海默（Robert Oppenheimer）、费曼（Richard Feynman）等物理学家。

按理说犹太民族应该是一个受到尊敬和保护的民族，但他们的生活境遇为何与此大相径庭呢？这是一个沉重的话题，却也是鲜活地摆在我们面前的客观事实。面对这样一个聪慧的民族，一般的考试难不倒他们，苏联的管理者能够想出名“犹太问题”

³ Vladimir Lenin was part Jewish, say declassified KGB files, Time, June 13, 2011.

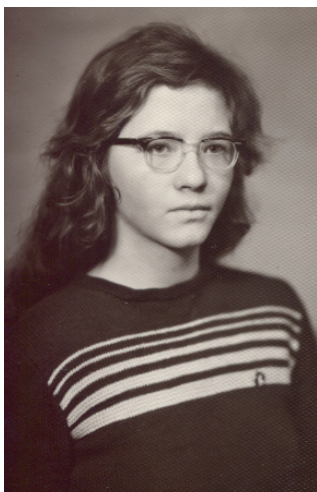
⁴ 徐元官，苏联犹太人为何“偷听敌台”，学习时报，2012年7月23日第09版。

来测试他们，在某种意义上也算是对犹太民族高智商的另一种致敬了。

俄国是一个数学强国，19世纪下半叶到20世纪初兴起的彼得堡学派闻名遐迩，对应用数学的发展贡献之大举世皆知。俄国十月革命后，莫斯科数学学派迅速崛起，不同于彼得堡学派的是，莫斯科学派更加注重理论数学，主要包括函数论学派和拓扑学派，当然也包括研究其他数学分支的大批数学家。可以说，莫斯科学派代表了苏联近现代数学发展的水平，所云集的优秀数学家数量只有19世纪末20世纪初的哥廷根大学能与之相媲美。因此，在苏联，莫斯科大学对学生录取所持有的态度是具有典型意义的，下面我们先从三位犹太数学家的个人经历谈起。

3 三位俄裔犹太数学家的亲身经历

3.1 美国麻省理工大学的数学家 Tanya Khovanova



Tanya Khovanova



Lida Goncharova

美国麻省理工大学的数学家 Tanya Khovanova 是一个犹太人，她 1976 年获得国际奥林匹克数学竞赛金牌，是苏联有史以来第 2 位斩获这项赛事金牌的女性。获得此奖殊荣的第一位苏联女性是 Lida Goncharova，她在 1962 年曾夺得国际奥林匹克数学竞赛金牌。

1975 年夏天，Tanya Khovanova 与 7 个队友在一个苏联数学训练营进行数学训练，准备代表苏联参加国际奥林匹克数学竞赛⁵。当时，Valera Senderov 是莫斯科的一个有名的数学教师，他与朋友想办法收集了一些“犹太问题”。在训练期间，Valera Senderov 就拿出一些“犹太问题”来让这些队员一试牛刀，并且希望用这些数学思想来对他们进行训练。当时，这个苏联奥数代表队可以说是由全苏联最富有数学天赋的 8 个学生组成的，可是他们在长达一个月的时间里，只找到了一半“犹太问题”的答案。当然，有一部分原因是他们并没有把全部的时间都花费在这些问题之上，但是这也足以说明了这些问题的难度之大。

当时，年纪尚轻的 Tanya Khovanova 的身心受到强大震撼，她万万没有想到时至

⁵ Tanya Khovanova, Alexey Radul, arXiv:1110.1556v2 [math.HO] 15 Oct 2011.

那时竟仍旧存在着对犹太人的歧视。她努力地解决这些问题，并把这些当作人生最宝贵的财富，至今仍完好地保存着她记录那些问题的蓝绿色笔记本。

后来，她移民到美国。在有自己的博客后，她所做的第一件事就是贴出一些“犹太问题”。在和网友双向交流的过程中，有人给出了一些问题的答案，也有人给她提供了更多的“犹太问题”。事实证明，不是所有的“犹太问题”都可以用初等数学来解决，有一些属于模棱两可的问题，有一些只是普通的问题，还有一些的前提并不存在。

3.2 美国加利福尼亚大学的数学家 D. B. Fuchs

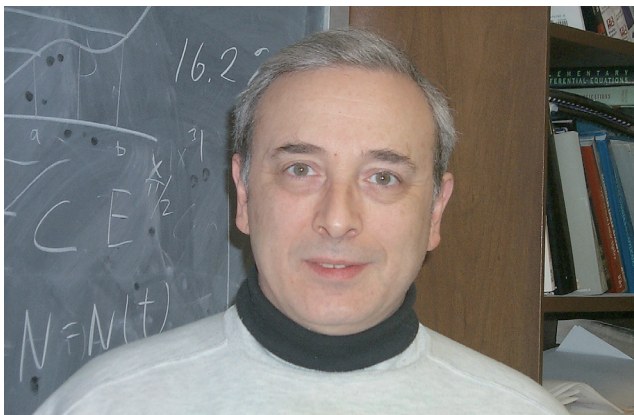


D. B. Fuchs

D. B. Fuchs 出生在一个数学教授家庭。⁶ 父亲 B. A. Fuchs 是伯格曼 (S. Bergman) 的学生，是一位知名数学家，也是一个著名的作家。一些著名的俄国数学家，包括 N. V. Efimov 和 V. A. Rokhlin，都是他们家的座上宾。因此，到了适当的年龄，他就自然有种想成为数学家的强烈愿望。鉴于当时国立莫斯科大学在苏联乃至全世界所处的显赫地位，他的这种愿望或多或少就等同于梦想进入国立莫斯科大学。然而，他的父亲对他的想法却并不全然赞同，只是支持他成为数学家，但反对他进入莫斯科大学。他的父亲试图这样说服他，说仅仅是因为他的名字，就不能迈入莫斯科大学的大门。原来，在俄国，Fuchs 听起来就是犹太人。实际上，他的父亲确实是犹太人，至少从生物学意义上可以这么讲，而他的母亲是来自俄国中部伏尔加的农民家庭。但那时他的年龄尚小，并不愿意听从父母的意见，即便父母的意见是明智的也会被当做耳旁风。他最终坚持自己的想法，申请进入莫斯科大学。庆幸的是，1955 年秋，他没有遇到明显的阻碍顺利进入了梦寐以求的莫斯科大学。应该说，D. B. Fuchs 的经历比较顺风顺水。生命中的 3 次重要抉择：进入莫斯科大学读本科、成为莫斯科大学的研究生、在莫斯科大学取得工作职位，恰恰与苏联的 3 次局部极小的反犹运动的时间相重合，但他似乎并未被牵涉其中。1991 年，他成为美国加利福尼亚大学戴维斯分校的数学教授。

⁶ D. B. Fuchs, On Soviet Mathematics of the 1950s and 1960s, <http://math.uchicago.edu/~drinfeld/Golden%20years/Fuchs.pdf>.

3.3 美国马里兰大学的数学家 Michael Brin



Michael Brin

说到 Michael Brin，大概没有多少人知道，但他的儿子却是几乎无人不晓，就是大名鼎鼎的谷歌共同创始人之一 Sergey Brin。是 Michael 把 Sergey 带到了美国，正巧 Sergey 开发了一套数据挖掘技术，又在斯坦福大学遇到了计算机科学家 Larry Page。于是我们有了谷歌。言归正传，Michael 当初之所以移民美国也是因为他的犹太人身份。

在 Michael 的家族里，曾经有人在美国留学。他的祖母毕业于芝加哥大学，在列宁领导的布尔什维克推翻了沙皇之后，她出于对俄国的信任，毅然在 1921 年回国参加新国家的建设。Michael 的父亲是一位数学博士、教授。Michael 本来想在大学学习天文学，但当他的父亲知道了他的这个想法后立即阻止了他，不为别的，只因他犹太人的身份。他只得退而求其次，选择学习数学。因为天文学包含在物理系，所以从这里我们也可管窥国立莫斯科大学物理系对犹太人的排挤更为厉害。

在大学期间，他几乎是一个全优生（除了党史、军训和统计），但是他不能获得任何研究生院的录取。他进入了苏联国家计委工作，每天的工作就是造数据，说明苏联的生活比美国好。他时常自嘲：“我会数学，因为我可以证明任何你要的东西。”他一边工作一边自学数学，到大学去听研究生的课，还写了几篇论文。那个时候，苏联的大学允许人们不经过正式的研究生学习阶段获得博士学位。国立哈尔科夫大学同意让他答辩。Michael 找了两个指导老师，这两个老师都是正直的数学家。1975 年，Michael 在国立哈尔科夫大学获得博士学位，他的论文题目是《部分双曲性》（*Partial Hyperbolicity*）。Michael 的兴趣在动力系统和黎曼几何方面，但是在苏联他不能从事数学研究。他只得继续在计委工作。

1977 年，在一次华沙的会议上，他见到了“西方”的人，通过与西方人的交谈，他认识到自己不是异类，而是政府把他们搞成了异类。1978 年 9 月，他决定带领全家移民美国去开始一个新的生活并正式向苏联政府递交了移民申请。他立即被单位开除，他的妻子也失去了工作。1979 年他的全家终于移民美国，开始了全新的生活。他随即成为了马里兰大学的数学教授并在那里退休。后来，他带领还在读高中的儿子及一些优秀的美国高中生访问了苏联。儿子动情地对父亲说：“谢谢您把我们带出了苏联！”^{7,8}

⁷ David A. Vise, *The Google Story: For Google's 10th Birthday*, Delta, 2008.

⁸ Mark Malseed, *The Story of Sergey Brin*, Moment, 2007 February-March.

4 “犹太问题”存在吗？

“犹太问题”存在吗？这个我们已经研判过的问题再次出现在我们的脑海当中，因为毕竟苏联这种对犹太人的歧视没有明确的公文，所以很多时候我们还是尝试去寻找更多的证据来支撑我们的判断，这样在逻辑上才不会断链，才会有理有据，不会陷于空谈和臆测。

据 D. B. Fuchs 在文章“1950年代和1960年代苏联的数学”⁹中讲，反犹运动开始于1949年末的反“世界公民”（cosmopolites）的斗争。这个斗争席卷了苏联人民生活的各方面，不仅仅包括入学考试。比如，Fuchs 的父亲在这次斗争中失去了工作，直到1953年秋天才在一所二流的技术学院获得一个席位，期间一直都处于失业状态。这种斗争实实在在地以一种极端的方式影响了大学入学考试。1950-1952年，除了少数特例，几乎没有犹太人被莫斯科大学的数学力学系录取。这少数人包括1952年进入这个系的西奈（Yakov Sinai）以及1953年进入这个系的10个犹太人或半犹太人，特别值得一提的是，这其中包括后来成名的数学家 Y. Manin, E. Golod, B. Mityagin 和 A. Dynin。当时，有人告诉 Fuchs，如果按照正常的测验程序，他们都不能进入这所学校。其中有些人是从其他学校转过来的，有的处于“候选学生”的半合法状态。但是到了1954年，特别是1955年，风云突变，问题有了转机，上述问题突然不存在了。转变是如此突然，以至于很多人，包括 Fuchs 的父亲都不知道甚至不相信这是事实。在接下来的15年里，局势又开始恶化。我们有理由相信绝大多数人应该是诚实地录取那些有天赋的学生的，但是也有为数不多的数学家努力使莫斯科数学力学系的种族更加纯粹。那些年物理学家做了关键性的工作。测验分为4个部分：数学笔试、数学口试、物理和作文。¹⁰1960年代晚期到1970年代早期，苏联开始了真正的反犹太运动。所有听起来像犹太姓氏的人（一些没有犯罪的德国人和爱沙尼亚人从中受害），或者有犹太父姓，或者父母中一个有犹太父姓的人，都被认为是犹太人。这是战后的苏联对犹太人的定义，犹太基因占主导，基本上只要有犹太基因就被认为是犹太人。即使你只有四分之一的犹太血统，具有四分之三的俄罗斯血统（比如 Alexander Beilinson），也会被看成是一个十足的犹太人。而这就可能成为通向莫斯科大学的绊脚石。

大学里反犹太人的第一道关卡是户籍。大学申请表上必须填写考生的种族、父母的姓名和祖父母的名字。这样，学校可以通过这些信息知道哪些学生是犹太人。¹¹

大学里反犹太的最有效的武器就是“犹太问题”，这些题目提供给进行数学口试的犹太学生。这些题目有时很难，有时需要大量的复杂运算。如果一个犹太学生在数学口试中顺利过关，那么他的作文就会获得一个差分数。

1970年代以及后来的一段时期，有很多天赋颇高的人没有能够通过考试进入莫斯科大学的数学力学系，比如 A. Beilinson, A. Givental, B. Tsygan。A. Beilinson 是上大三时从师范学院（Pedagogical Institute）转过来的，A. Givental 毕业于石油学院（Oil Institute），B. Tsygan 在基辅学习。这已经足以说明问题。当然也有一些不太有名的人在这个测验中名落孙山。但是那些自动放弃的人基本上就无法统计了。

⁹ D. B. Fuchs, On Soviet Mathematics of the 1950s and 1960s, <http://math.uchicago.edu/~drinfeld/Golden%20years/Fuchs.pdf>.

¹⁰ A. Shen, Entrance examinations to the Mekh-mat, Math. Intelligencer, 1994, 16(4): 6-10.

¹¹ M. Shifman, You failed your math test, Comrade Einstein, Adventures and Misadventures of Young Mathematicians, World Scientific, 2005.

1970-1988年，数学力学系规定，保持每年500个学生中有3至5个犹太或半犹太人的比例。这几个学生进来也并非容易，通常他们都必须通过向各种名目的委员会申诉才行。1980年，大约有400名从最好的莫斯科数理高中毕业的学生，没有一个护照上印有“犹太人”字样的学生申请国立莫斯科大学。1989年，局势又有很大好转，但麻烦的是测试委员会的大多数成员依然是以前那些人。

这个现象在其他学校也是一样。拒绝了菲尔兹奖和千禧年大奖的俄国数学家佩雷尔曼就是那极少数人之一。佩雷尔曼因为在1982年国际奥数比赛上获得了满分而被圣彼得堡国立大学免试录取，躲过了这一关。不过，佩雷尔曼的人生与犹太人在苏联的境遇也脱不了干系，他正是因为其父执意离开苏联移居以色列（这是世界上唯一一个犹太人国家）而开始自我封闭的。

第一个站出来暴露这个问题的一批人有苏联异见数学家 Boris Kanevsky 和 Valery Senderov。1980年他们写了一篇以手抄本形式流传的文章“智能种族灭绝”。当时在苏联，所有的出版物都必须经过“保护国家机密的新闻总局”批准。任何对苏联意识形态不能有所帮助的东西都属于违禁作品。他们当然触犯了苏联的法律。Senderov 被判7年劳改和5年流放；Kanevsky 则在监狱里蹲了3年。1978年，苏联女数学家 Bella Subbotovskaya 竟然在莫斯科建立了一个犹太人民大学（Jewish People's University），专门录取被歧视的犹太学生。克格勃对这个“非法”机构和 Subbotovskaya 本人进行了调查。1982年9月23日的一个晚上11点左右，她在莫斯科的一条小巷里被一辆飞速行驶的卡车撞死。卡车没有停留，随后另一辆神秘的汽车在她的尸体边稍微停留后也飞驶而去，然后一辆救护车把她的尸体拉走。警方一直未能破案，案件也就这样不了了之，她建立的大学也在次年被迫关闭。Subbotovskaya 死时年仅44岁。¹²



Bella Subbotovskaya

沃什克（Anatoly Vershik）在文章《1970年代和1980年代俄罗斯数学教师的聘任》

¹² George G. Szpiro, Bella Abramovna Subbotovskaya and the “Jewish People's University”, Notice of the AMS, 2007, 54(10): 1326-1330.

(*Admission to the Mathematics Faculty in Russia in the 1970s and 1980s*)¹³ 中提供了一些有价值的信息：时至今日，我们仍不知道 1970 年代早期所下达的秘密指令的详情，但当时我大致被告知：“对于某些与敌视苏联的国家有关的大专学校学生，要限制或者延迟录用，其中可能包括犹太人、德国人、韩国人、希腊人以及中国台湾人。”沃什克然后谈到，让人们谈论此事并承认这件事曾经确凿地发生过是非常困难的，他说：“当我拜访原圣彼得堡大学的校长 S. P. Merkuriev 时，询问是否可以查阅党委会处理这些问题的原始档案。他虽然表示帮助我，但警告我不要高估苏联局势的变化，这些事情的几乎所有组织者不仅还保留着以前的位置，而且在大学仍握有实权，比如，他不能按照自己的意愿开除可恶的院长。”当沃什克想要邀请两位曾经因对反犹太学生持反对意见而被排挤出学校的历史学家一起看档案时，这两位历史学家不约而同地一口谢绝了，理由是：“我们害怕了，他们会把我们抓起来的。”1987 年，沃什克把一篇关于学生录取案例的文章投寄给《莫斯科新闻周刊》(*The Progressive Weekly Moscow News*)，时任《莫斯科新闻周刊》的部门主任告诉他：“我们不能刊发讨论这种问题的文章，会有很多愤怒的信件和口水朝我们扑面而来的。”苏联物理学家 M. Shifman 也遇到过类似的情况。他在一篇介绍美国物理学家费曼的文章提到说费曼是犹太裔，这篇文章就被小心谨慎的编辑勒令删除这段文字或撤稿。

这种反犹太运动是既不公平又非明智的。D. B. Fuchs 怀疑参与反犹运动的人是受到了纯粹的反犹太情绪的影响。据他的父亲说，人们通常认为伊万·维诺格拉多夫(I. M. Vinogradov)是数学反犹太的领袖。1930 年代晚期，有犹太人围绕在他的周围。特别是他不经过与地方党政领导 B. Segal 商议，从来不作为斯捷克洛夫研究所的负责人做一些重要决定。B. Segal 实际上是维诺格拉多夫的工具和门徒。可能是 1968 年，D. B. Fuchs 曾对沙法列维奇(I. R. Shafarevich)说起反犹太的问题，并且提到 1950 年所有的数学教授没有任何理由地被赶出数学力学系。沙法列维奇听罢怒不可遏地问道：“谁告诉你这个的？”Fuchs 回答道：“可能是盖尔范德。”据 Fuchs 说，其实并不是盖尔范德告诉他的，至少盖尔范德不是第一个告诉他的人。但是这个反犹太问题在当时似乎所有的人都知道。事实上，被人誉为苏联数学界三大泰斗（另两位是柯尔莫戈洛夫和沙法列维奇）之一的盖尔范德是犹太人，家境贫寒，十五、六岁时跟父亲流浪到莫斯科打工，制作桌椅门窗。他喜欢数学，溜进莫斯科大学的教室旁听数学课，从而被发现。1932 年，盖尔范德被莫斯科大学录取为研究生，师从柯尔莫戈洛夫，1943 年任莫斯科大学数学教授。沙法列维奇继续说道：“盖尔范德确实是不得离开数学力学系的，但是我不是犹太人，一样不得离开，他们简单地解雇了所有优秀的数学家，包括犹太和非犹太人。”

D. B. Fuchs 认为沙法列维奇的说法有一定道理。如果当局的政策只是直接针对犹太人，那么数学力学系就如何也不会落得后来悲惨的境地。苏联是一个大国，如果禁止犹太人进入到数学力学系，或者说不录取左撇子、蓝眼睛的人，或者依据其他的规则来决定录取，但是诚实地从其他符合录取规则的人中选择最优秀的人才，一样是不道德和不公平的，但应该不会使苏联的数学一落千丈。因此，反天才的斗争才是使得苏联天才数学家泯灭的原因，比如，数学力学系的权威通常认为莫斯科数学最好的高中生是犹太人，而并不实地考察他们的真实身份。应该说，这是一家之言，在某种程度上也具有其合理性。

¹³ A. Vershik, Admission to the mathematics faculty in Russia in the 1970s and 1980s, *Math. Intelligencer*, 1994, 16(4): 4-5.

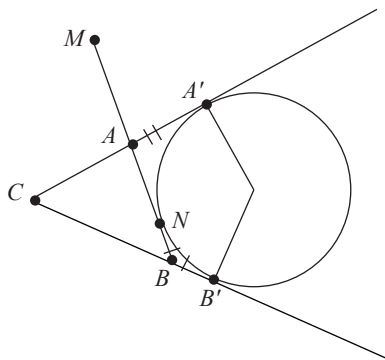
5 “犹太问题” 示例

美国麻省理工大学的数学家 Tanya Khovanova 于 2011 年 10 月 15 日在 arXiv 网站与她的儿子 Alexey Radul 一起发表了一篇文章《犹太问题》(Jewish Problems)²，其中精选了 21 个“犹太问题”。下面的问题 1-5 就是我们从其中挑选出的几个问题，看看这些题目到底有什么巧妙之处。其中两个几何问题加入了我们自己的思路和作图。我们必须说明的是，目前，犹太问题看似简单了不少，原因有二：一是因为这些问题的解法在一定程度上得到了传播；二是因为有些思想方法已经随着数学的发展变得比较正统。而此前，这些问题的难度之大是令人无法想象的。更让人气愤的是，在考试的时候，问题一个接一个，直到学生做不出来为止。

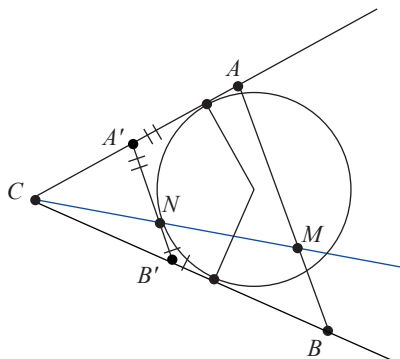
问题 1：已知一个平面上的一个点 M 和一个角 C 。用直尺和圆规，画一条通过点 M 的线，这条线在角 C 上切出一个：(1) 周长为 p 的三角形；(2) 最小周长的三角形。

解答：这道题的解题思想是在角 C 中画一个圆。

(1) 在角 C 的两条边上构造点 A' 和 B' ，使得 $p/2 = CA' = CB'$ ，然后画一个过 A' 、 B' 两点内切于角 C 的圆。当点 M 在角 C 的外面时，如图过 M 点作圆的切线，切点为 N ，与角 C 相交于两点 A 和 B ，可知 $AA' = AN$ 、 $BB' = BN$ ，因此三角形 ABC 的周长为 p ；当点 M 在线段 CA 、 CB 与弧 AB 构成的闭合区域内时，可类似地做出三角形 ABC ，而且可得到两种解。当点 M 在以上两种情况之外的区域时，本题无解。



(2) 当点 M 在角 C 的外面时，显然最小周长为 0。当点 M 在角 C 的里面时，做角 C 的任意内切圆及直线 CM ，直线 CM 与内切圆交于点 N 、 P ，其中点 N 更接近于点 C ，过点 N 做内切圆的切线，与角 C 相交于点 A' 、 B' ，过点 M 做切线 $A'B'$ 的平行线，与角 C 相交于点 A 、 B ，则三角形 ABC 就是所求的周长最小的三角形。



问题 2 : 比较 $\log_2 3$ 与 $\log_3 5$ 的大小。

解 : 这道题的核心思想是把这两个值都与 $\frac{3}{2}$ 比较。首先, 比较 $\log_2 3$ 与 $\frac{3}{2}$ 的大小。函数 2^x 与 x^2 是单调的 (至少对正数来说), 因此, 可以得到

$$(2^{\log_2 3})^2 = 3^2 = 9 > 8 = 2^3 = (2^{3/2})^2, \quad \text{即 } \log_2 3 > \frac{3}{2}.$$

然后, 比较 $\log_3 5$ 与 $\frac{3}{2}$ 的大小。函数 3^x 与 x^2 是单调的 (至少对正数来说), 因此, 可以得到

$$(3^{\log_3 5})^2 = 5^2 = 25 < 27 = 3^3 = (3^{3/2})^2, \quad \text{即 } \log_3 5 < \frac{3}{2}.$$

因此, $\log_2 3 > \log_3 5$ 。

问题 3 : 解不等式 $x(8\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}) \leq 11\sqrt{1+x} - 16\sqrt{1-x}$, 其中 $x > 0$ 。

解 : 这道题的关键是用一个代换 $y = \sqrt{1-x}/\sqrt{1+x}$ 。首先, 题目对于 $x > 1$ 没有定义。

然后, 令 $y = \sqrt{1-x}/\sqrt{1+x}$ 。然后, 由 x 的取值范围可得 y 的取值范围为 $0 \leq y \leq 1$, y 对 x 来说是单调递减的。另外易得 $x = (1 - y^2)/(1 + y^2)$,

有了这些分析, 我们可以对原不等式进行下列变换

$$\begin{aligned} x(8\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}) &\leq 11\sqrt{1+x} - 16\sqrt{1-x}, \\ x(8\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}} + 1) &\leq 11 - 16\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}, \\ \frac{1-y^2}{1+y^2}(8y+1) &\leq (1+y^2)(11-16y), \\ (1-y^2)(8y+1) &\leq (1+y^2)(11-16y), \\ -8y^3 + 12y^2 - 24y + 10 &\geq 0, \\ (2y-1)(-4y^2 + 4y - 10) &\geq 0. \end{aligned}$$

因此, $2y - 1 \leq 0$ 。另外, 因为 y 对 x 来说是单调递减的, 所以

$$\frac{1-(1/2)^2}{1+(1/2)^2} = \frac{3}{5}.$$

最终结果为 $3/5 \leq x \leq 1$ 。

问题 4 : 证明 $\sin 10^\circ$ 是无理数。

证明 : 核心思想是用 $\sin 30^\circ$ 来表示 $\sin 10^\circ$ 。通过反复运用角的正弦和余弦公式, 得到

$$\frac{1}{2} = \sin 30^\circ = 3\sin 10^\circ - 4\sin^3 10^\circ.$$

即 $0 = 8\sin^3 10^\circ - 6\sin 10^\circ + 1$ 。令 $x = 2\sin 10^\circ$, 则 $0 = 8\sin^3 10^\circ - 6\sin 10^\circ + 1$ 可化为 $x^3 - 3x + 1 = 0$ 。这个方程的全部有理根必为整数且整除常数项。因为 $+1$ 和 -1 不满足条件, 因此, 所有的根必为无理数。

问题 5 : 已知一个三角形 ABC , 用直尺和圆规, 在 AB 上构造一个点 K , 在 BC 上构造一个点 M , 使得 $AK = KM = MC$ 。

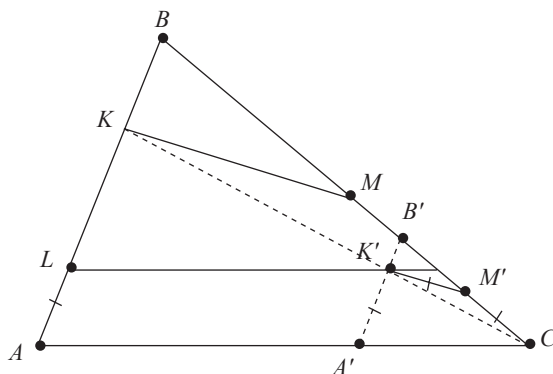
解 : 在 BC 上任取一点 M' , 在 AB 上取一点 L , 使得 $AL = CM'$ 。过点 L 做一条平

行于 AC 的直线，取其上一点 K' ，使得 $K'M' = CM'$ 。过点 K' 作一条平行于 AB 的直线分别交 AC 、 BC 于点 A' 、 B' ，可知 $A'K' = K'M' = CM'$ 。

过点 C 、 K' 做直线交 AB 于点 K ，取 BC 上一点 M ，使得 $AK = KM$ 。可知三角形 ABC 与三角形 $A'B'C$ 为相似三角形，且多边形 $AKMC$ 与多边形 $A'K'M'C$ 为相似多边形，因此 $AK = KM = MC$ 。

作图中，在 CM' 取值较大时，点 K' 可能会处于三角形 ABC 外部，在 CM' 取值较大且 $AB < BC$ 时，点 L 可能会在 AB 的延长线上，以上两种情况只是在作图时有些麻烦，不会影响解题的结果。

作图中，如果 B' 处于线段 CM' 之间，则点 M 将处于 CB 的延长线上，此时本题无解。



有人曾经听到一位数学教授与招生办主任的一段对话，生动地描述了他们是如何做的：“别担心，我们会让他们都不及格……。”莫斯科大学出版的《现实社会主义成就》第 1982 卷里更明目张胆地说：“所有的学生都受到平等待遇，但有些人会比另一些人更平等”。这句话与 1945 年出版的一本讽刺斯大林的小说《动物农场》里的一句如出一辙：“所有的动物都是平等的，但有些动物比别的更平等。”有的极聪明的犹太学生竟然做出了某个达到了国际奥数水平的题目，考官仍然会调整口试以确保该学生考试不及格。1980 年，有 8 名数学高中的学生申请了国立莫斯科大学，4 名俄罗斯人，4 名犹太人。4 名俄罗斯人全部被录取，4 名犹太人全部未被录取（2 人在笔试时得了 2 分，1 人在口试时得 2 分，1 人在写作时得了 2 分，各科满分均为 5 分）。¹⁵ 下面我们再举两个例子。

问题 6：解方程 $\sqrt{x+1}(4-x^2)=0$ 。

注：这道题看起来很容易，但是它暗藏杀器。一个学生的解是 $x = -1$ 或 $x = 2$ ，被考官判为错误。另一个学生的解是 $x = \{-1, 2\}$ ，也被判为错误。显然这两个解所缺少的是 $x = -2$ 这个解。但是在当时苏联的高中数学教学大纲里明确地说， \sqrt{x} 只有在 x 为非负实数时才有定义。任何人在大学入学考试时写下“当 $x = -2$ 时 $\sqrt{x+1} = \pm i$ ”都会被判为错。学生们的申诉被驳回。

¹⁵ M. Shifman, You failed your math test, Comrade Einstein, Adventures and Misadventures of Young Mathematicians, World Scientific, 2005.

问题 7 : 证明不等式 $\sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}} + \sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}} < 2\sqrt[3]{3}$.

注 : 这道题用上凸函数 $f(x) = \sqrt[3]{x}$ 的性质来做是简单明了的 :

$$\frac{f(3+\sqrt[3]{3})+f(3-\sqrt[3]{3})}{2} < f\left(\frac{(3+\sqrt[3]{3})+(3-\sqrt[3]{3})}{2}\right)$$

但是在苏联高中里并没有讲到凸函数的概念。还有一个简单的办法是用导数求极值。取函数 $f(x) = \sqrt[3]{3+x} + \sqrt[3]{3-x}$ 然后证明 $f(x)$ 在 $x = 0$ 并只在此点取得极大值。因此 $f(0) > f(\sqrt[3]{3})$ 。苏联的教学大纲确实介绍了导数，但只是微积分入门中的一部分，完全没有讲到用导数求极值的方法。要求学生用这个方法在 20 分钟之内做出来是不合理的。还有一个用的是初等方法：将原式变形为

$$\sqrt[3]{1+\frac{\sqrt[3]{3}}{3}} + \sqrt[3]{1-\frac{\sqrt[3]{3}}{3}} < 2.$$

然后两次使用当 $x > -9$ 时 $\sqrt[3]{1+x} < 1 + \frac{x}{3}$ 的事实。但是这个方法明显复杂多了。还有其他方法就更绕路子了。不仅如此，考官还不失时机地打断学生思路，抱怨学生做得太慢。该学生理所当然地提出申诉。他的申诉也被驳回。

让我们也顺便看一看给“受欢迎的”学生都是些什么题目：

问题 8 : 证明不等式 $\sin x + \cos x \leq 2$.

问题 9 : 化简表达式

$$\frac{1}{\frac{1}{\log_a x} + \frac{1}{\log_b x}}.$$

问题 10 : 作出 $y(x)$ 的图像，其中 $y(x)$ 满足 $|y| + |x-1| = 1$.

问题 11 : 解方程 $\cos x = \cos 2x$.

6 “犹太问题”留给人们的思考

在我们信笔游弋，对“犹太问题”惊讶、探寻和扼腕之余，我们也不禁有了更多的思考。这些讨论和思索是对“犹太问题”的回顾，是对其历史渊源的反思，也兼有对生活中类似问题的检阅和审查。

有人说，也许俄国犹太人在标准测试（standard test）中的表现太过出类拔萃，以致于在学生人口中占比超出。如果莫斯科的大学为了实现社会主义多元化的崇高目标，才给不同的人群出不同的题目，最终录取每个族群的最优秀的学生，那么这在一定程度上应该有一定的公平意义。这种说法似乎有一定的道理，现如今美国的很多学校对各个族群的录取都是有一定比例的。

有人说，理解数学是重要的，因为如果理解了数学，那么一般就能够了解特定的人群。数学真的有能力区分特定的人群吗？也许是的，因为有人能够言之凿凿地举出一些案例，比如，“解不等式 $x(8\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}) \leq 11\sqrt{1+x} - 16\sqrt{1-x}$ ”这类题经常使犹太人困惑；“证明 $\sin 10^\circ$ 是无理数”这类题总是令黑人头脑发胀；在“把一个等边三角

形放在一个方格网上，是否有可能使得所有顶点在角上？”这个问题上，爱斯基摩人和瑞典人一般表现良好，而墨西哥人和立陶宛人却表现不佳；意大利人和马绍尔群岛的人一般对“ $\log_2 3$ 与 $\log_3 5$ ，哪一个更大？”这样的问题感到束手无策¹⁶。

其实，类似“犹太问题”的做法并不是一个孤例。澳大利亚曾经执行过“白澳政策”（White Australia Policy）。1901年，澳大利亚正式把“白澳政策”确立为基本国策，基本要旨是只许白人移居，迟至1972年才被取消。当时，想移民到澳大利亚的人要在移民局检查站的欧洲语言部门进行听力测试。澳大利亚对于想要的人会给他们英语测试题或者测试人所熟悉的语言的测试题，而对于不想要的人则会给他们晦涩的方言，或者特意选择冗长费解的句子或科技论文中一些充斥着专业术语的段落，以此来排除掉不想要的人。

诚然，这些问题的背后一般都隐藏着错综复杂的历史情由，孰是孰非，我们不去界定，不去一锤定音。我们坚信在这个日趋平等和自由的世界里，阻碍人类自由和进步的藩篱终将被打破，那些真正有志于数学和科学的人们不会因前进路上的荆棘而放弃美好的追求和向往，令人心痛的“犹太问题”也终将守得云开见月明，不会再成为问题。

致谢：衷心感谢 Mikhail Shvartsman 教授热情地为我们提供宝贵的文献资料！衷心感谢张英伯教授提出的宝贵建议和意见！

¹⁶ Jewish Problems, <http://www.metafilter.com/108272/Jewish-Problems>.

作者简介：

王淑红，河北师范大学数学与信息科学学院副教授，主要从事近现代数学史研究。

蒋迅，北京师范大学数学学士、硕士，美国马里兰大学博士。现在美国从事科学计算工作。