

漫谈数学文化

曹之江



全国首届名师曹之江

1

文化，是人类区别于动物界的主要标识，是一个无比广博、与时俱进的范畴，而数学文化仅是它的特殊分支。这里所谓的“数学”，当前在国际上有个名称——Mathematics，这是一个西文的名词。根据历史资料所载，它发端于纪元前几百年的古希腊，直到中世纪才传播到欧洲及全世界，并得以发扬光大。因此对我们中国人来讲，Mathematics 乃是一个西方的舶来品。在一百多年以前，中国基本上还没有人知道 Mathematics 为何物，直到西方人用坚船利炮打开这个缺口以后，才逐渐传入到了中国。然而，因为 Mathematics 是一种理性的产物，它不像猫、狗、石头等物质，东西方都有，因此存在着对应的名词可以互相翻译。而在中国的典籍中却没有 Mathematics 对应的东西，因此要把它译成中文就很困难。我们的前人把 Mathematics 译为“数学”，他们这种译法自然有自己的深谋远虑，我们作为后人不便评说。然而“数学”这种译法很容易使人把 Mathematics 理解为“数”的科学。诚然，“数的科学”——就像华罗庚、陈景润等人搞的数论，它虽然是 Mathematics 的一个重要分支，但却远远不是 Mathematics 的全部。因此，从字面上看“数学”不能反应出 Mathematics 的全貌，然而，因上百年来我们都是用的“数学”这个词。由于约定俗成，我们下面的行文仍然沿用“数学”这个词来代表 Mathematics。但我们所讨论的都是 Mathematics 这种舶来学问。

2

为了说明数学是一种什么样的文化，或者说，数学是一种什么样的学问，我们需要先简介一下人类的理性主义文化。人类在长期的争取生存和求得自身发展的斗争中需要观察周围环境中的一切，了解它们的变化发展。例如他们需要观察大自然中声、光、热、电、磁以及各类物体的机械运动和它们之间的表面作用力等原理和规律，这种知识积累多了，就形成了后来的物理学。人类除了有物理学以外，还有化学、生命科学、天文学、地质学、电子学、计算机科学等等种类繁多的各种科学门

类, 这些科学门类都是人类在实践中经过长期的观察、实践、再观察、再实践和复杂的理性分析、归纳等过程而得到的, 因此我们统称之为人类的理性主义文化活动。这个理性主义的文化活动是由古希腊人发端的, 他们的代表人物是毕达哥拉斯、柏拉图、亚里斯多德等。这种理性主义的文化后来推广到欧洲和全世界, 形成为今日科学技术物质文明的主流。数学, 一般人都把它当作是理性主义文化中的一个部分, 因此人们常常把这种文化简称为“数理化”。然而, 数学与其他各类物质科学是有实质性区别的, 不能混为一谈。譬如化学是研究各类物质元素的结构和它们的相互作用; 生命科学是研究各类动植物的生长演化规律; 天文学是研究广袤的宇宙空间里星体的演化发展规律等等。而数学的研究对象是什么? 数学是没有研究对象的! 数学不研究任何实际事物, 它所讨论的不过是由一堆文字符号所组成的系统, 这些文字符号代表什么? 它们不代表任何现实的物质! 但它们却在一定的公理规则的约束下进行演绎推理, 因此所谓数学乃是各种由文字符号组成的在一定公理规则约束下的演绎系统。因为数学不以任何现实物质作为研究对象, 这就表现了数学的超现实性。但是数学的这种超现实性并不等于说它是脱离现实的。下面兹举两个例子: 如事物数量上的一条规则 $3+5=8$, 这是任何物质系统都要遵循的一条数量规则, 它是由数学中的代数公理所演绎出来的一条定理, 这里面 3、5、8 只代表抽象数字, 它们没有量纲, 不代表任何物质, 但是数学上演绎它们的代数公理却是从所有物质系统的数量规则中抽象出来的, 这类演算规则作为“公理”(即不许再加证明的)被归纳在数学之中, 因此由这种代数公理所演绎出来的一切数量演算规则, 都可以回归应用到所有物质系统中。于是从这个意义上来讲, 数学仍源于物质, 并植根于现实。数学的另外一个例子, 由三条直线所围成的三角形, 它的三个内角 A、B、C 之和 $A+B+C=180^\circ$, 这就是著名的由欧几里得的几何公理所演绎的一条几何定理, 它适用于地球表面广大空间内一切形体。欧几里得公理也是人们在长期实践中所得到的形体规则。然而后来(十九世纪)人们发现欧氏公理不是绝对的, 人们在地球表面以外更广大的宇宙尺度空间中发现 $A+B+C \neq 180^\circ$, 这就是知名的非欧几里得几何。但不论是欧氏几何或非欧氏几何, 它们的公理亦仍然都是源于物质, 植根于现实的。

3

上文提到数学是一种不以任何现实的物质系统作为研究对象的科学, 表现出了超现实性的品格。正是因为它的超现实性, 使得人们对于数学特别是现代数学的认知产生了许多问题, 许多人不明了这数学为何物, 就学不进去。其实, 我们在上文也同时提到了数学仍是一种源于物质, 植根于现

实的文化, 它的超现实性正是它的物质性的一种反映。因为制约一个数学系统的任何公理体系, 都是来源于现实的物质系统的, 它们是一切现实物质系统本性的概括与抽象。而这种概括与抽象乃是无限的高度概括与抽象。因而它一方面使得抽象物质失去了一切的物质属性, 从而产生了超现实性; 而另一方面, 它又使得由这无限高度概括出来的抽象物(数学公理)具有了一切物质系统所具有的共性, 从而使得它所延伸的一切定理和性质, 都能普遍适用于任何现实物质系统。这就说明了数学在现实的物质世界里具有无限广阔的应用前景。因此数学的超现实性正是源于它的物质性。正因为数学具有这一对双重的特性, 就造成了人们对于数学文化特别是现代数学文化认知上的一对基本矛盾: 它既是难于认识的, 同时又是可以认知, 而且具有无限广阔的应用前景。这就告诉了我们在数学, 特别是现代数学的教学上必须正确地去认识这对基本矛盾, 并努力把它们调和起来。譬如在教学上做到返朴归真, 多讲解抽象数学的物质性。

这一对数学教学上的基本矛盾在现代数字的教学上显得尤为突出。记得我们在上小学、中学时, 数学课本里的符号 1, 2, 3, ... 以及它们的四则运算从未使我们感觉到抽象难懂, 它们的现实背景和物质来源是如此的明白, 因此当我们看到这些抽象的数学符号时就会想到二只苹果、三条狗, 后来出现了小数分数, 以至于用文字符号 A, B, C 等代替了数字仍然未感到不好理解。直到上了大学学到了微积分等抽象数学时, 我们才意识到理解上的严重问题。这实数是用来干什么的? 它是从哪里来的? 这极限、函数又是什么? 微积分又是怎么产生的? 我们为什么非要这些东西不可等等。因为上述这些概念都是实际生活中所没有的, 都不是我们经验里的东西, 于是我们应该怎样去理解这些理性的思辨的东西? 这就是本文所讨论的文化, 为简易说明它们的来龙去脉, 我们还另需要一些篇幅, 这里就暂且不谈了。

作者介绍:

曹之江, 男, 教授。1934年11月出生于浙江省上虞县。1953年—1957年就读于北京大学数学力学系, 毕业后志愿建设边疆, 到内蒙古大学任教。任教期间, 曾先后任内蒙古大学数学系主任、内蒙古大学副校长、教育部数学力学教学指导委员会理科数学组组长等职。2003年被教育部授予首届国家级教学名师奖。