数学与选举

万精油

每到大选，美国社会各界就全体总动员。政治家当然是到处拉选票，各大媒体更是评论加民意调查加八卦候选人，各种招数都使出来吸引眼球。连不食人间烟火的数学家也不例外。2008 年初的美国数学年会就有一个关于选举中的数学问题的报告，临近大选的那一期数学会刊又有一篇相关文章。文章中的一些例子很容易对大众讲清楚，我这里就把它们整理出来与大家分享。

主要结论是：在竞选者实力接近的时候（各方支持者数量差不多），选举结果只是对选举规则的反映，而不一定是对选民意见的反映。

什么叫对选举规则的反映？这结论听起来怎么有点违背常理。要说清楚这个问题，我们先来看一个例子。

假设有三个候选人 A，B，C。11 个人来投票，每个投票人列出他们对这三个人的支持程度，也就是给这三个人排一个从支持到不支持的序。结果如下：

3 人：A > B > C
2 人：A > C > B
2 人：B > C > A
4 人：C > B > A

如果选举规则是每人只选一个人，根据上面列出的表我们可以看出 A 会赢。只选一个人的结果是 A > C > B（得票依次是 5，4，2）。如果选举规则是每人可以选两人，然后再从前两名中挑出得票最多的（相当于初选加复选），我们可以看到其结果是 B > C > A（得票依次是 9，8，5）。这个例子说明，同样的选民，同样的意向，因为选举规则的不同可以得出完全相反的结论。还有一些地方（比如欧洲一些地方的选举）对意向采用 Borda 加权（起始于 1770 年）。对每个意向表，第一名得两分，第二名得一分。最后把每个人的得分加起来看谁的分多谁当选。如果对上面的意向表采用这个 Borda 加权，我们得出另一个不同的结果 C > B > A（依次得分是 12，11，10）。如果用另外的加权方法，我们还可以得出别的不同结果。

同样的意向表，不同的加权，到底会产生多少个不同的结果？有定理说：

对 N 个候选人，存在一个意向表使得不同的加权会产生 (N-1)(N-1)! 个不同的结果。*

显然，对加权的限制是前面的权要大于等于后面的权。另外还要求最后一名的权是 0。在这种条件下，如果有 10 个候选人（比如美国的总统初选），同样的意向表可以产生超过三百万种不同的结果。

有人说数学上证明的存在例子都是人为造出来的特殊情况，实际选举出现这种特例的机会是不多的。对这些怀疑者正好有另一个定理等在那里回答。该定理说：

如果有三个候选人，他们的支持度差不多（没有人有特别大的优势），则有大于三分之二的可能性（实际数是 69%）选举规则会改变选举结果。

三分之二可不是一个小数，比一半大多了。也就是说当各方实力接近的时候，选举规则会改变选举结果的时候比不会改变结果的时候多一倍。

以 2008 年的大选为例，如果把全体美国人的意向列一个意向表，我们几乎可以肯定不同的规则会产生不同

的结果。也就是说对这个意向表不同的加权可以产生希拉里赢，或者奥巴马赢，或者麦凯恩赢。

这种现象并不只在选总统的时候出现，在日常生活中也会冒出来，甚至影响到你自己。比如你去面试一个工作，总共四个面试者，A，B，C，D。四个人每个人做一个报告。听报告的一共 30 个人。听完报告后这 30 个给出每人的意向表，结果如下：

3 人：A > C > D > B
6 人：A > D > C > B
3 人：B > C > D > A
5 人：B > D > C > A
2 人：C > B > D > A
5 人：C > D > B > A
2 人：D > B > C > A
4 人：D > C > B > A

假设你是 D，根据这个意向表，你就没有戏了。因为只有一个位置，所以只有一个人能得到。按第一票算，其次序是 A > B > C > D（得票依次是 9，8，7，6）。显然 A 胜。正当他们准备打电话通知 A 面试成功的时候，C 打电话来说他弃权，因为他已经接受了另一个工作。初看起来，C 排第三，他的弃权对只选一个人的结果不会有影响。其实不然，如果你把上面的意向表中的 C 都去掉，你会发现结果完全不同了。因为 C 的 7 票有 2 票给了 B，5 票给了你（D）。最后的结果是 D > B > A（得票依次是 11，10，9）。

如此的例子还有很多，单就上面的这个例子看，任何一个人弃权都会改变结果的次序。对这样的混乱现象有人用混沌来形容。

最后再回到开始的那句话：在竞选人实力差不多的情况下，选举结果是对选举规则的反映，而不一定是对选民意向的反映。